Teorias de campo não-comutativas em dimensões extras

I. INTRODUÇÃO

Em 1947, um estudante de J.R. Oppenheimer, H. Snyder, declarou em um dos seus artigos que "*It is possible that the usual four-dimensional continuous space-time does not provide a suitable framework within interacting fields and matter can be described*". Paralelamente, matemáticos como Alain Connes, em meados de 1980 formularam boa parte das ferramentas utilizadas para o estudo de um espaço-tempo não comutativo. Mesmo que a idéia não seja necessáriamente nova, recentemente a motivação para seu estudo foi renovada pelo trabalho de Seiberg e Witten em teoria de cordas, onde eles demonstraram que a dinâmica das extremidades de uma corda aberta em um D-brana na presença de um campo magnético de fundo pode ser descrito por uma teoria de Yang-Mills no espaço não-comutativo.

Não-comutatividade no espaço tempo é realizada representando as coordenadas x^μ por operadores hermitianos $\hat{x}^\mu$, tais que

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}. \tag{1}$$

O produto de Moyal é utilizado para obtenção dos produtos entre funções neste espaço:

$$(f \star g)(x) = \exp\left(\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right) f(x)g(y)\Big|_{y\to x}.$$

Parece natural supôr que, para o parâmetro de não-comutatividade $\theta^{\mu\nu}$, como introduzido em (1), a escala de Planck seja um candidato ao seu valor numérico, tal que $\sqrt{\theta} \approx l_P$. Paralelamente, têm havido um recente interesse pelo estudo de dimensões extras e sua provável compactificação (veja por exemplo, [1]). Então, supondo um cenário onde ambas, não-comutatividade e dimensões extras convivam, a medida do parâmetro θ nos leva a determinação de uma estimativa da escala de compactificação, desde que esta é proporcional a comprimento de Planck [2]. Ainda, como ambas tem forte motivação da teoria de cordas também acreditamos que o estudo de uma possível conexão entre os dois temas e suas implicações experimentais seja relevante. Propondo a lagrangiana em $(4+1)D$

$$\int d^4x\, dy [\bar{\hat{\Psi}} \star (i\gamma^M D_M - M(y)) \star \hat{\Psi}] - \frac{1}{4}\hat{F}_{MN} \star \hat{F}^{MN} + c\epsilon_{ABCDE}\hat{A}^A \star \partial^B \hat{A}^C \star \partial^D \hat{A}^E, \tag{2}$$

com as definições

$$\begin{aligned} D_M &= \partial_M - ie\hat{A}_M, \quad \hat{F}_{MN} = i[D_M \stackrel{\star}{,} D_N] = \partial_M \hat{A}_N - \partial_N \hat{A}_M - ie[\hat{A} \stackrel{\star}{,} \hat{A}_N] \\ \{\gamma^N, \gamma^M\} &= 2\eta^{NM} \Rightarrow \gamma^N = \{\gamma^\mu, i\gamma^5\}, \end{aligned}$$

e as coordenadas obedecem uma relação de não-comutação entre sí

$$\begin{aligned} [x^M, x^N] &= i\Theta^{MN} \\ \Theta^{MN} &= \begin{pmatrix} \theta^{\mu\nu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para que o fóton possa acoplar com outros campos de matéria que carreguem outras cargas que não $0, \pm 1$ usamos o mapa de Seiberg-Witten, ou seja, faremos a substituição das seguintes expansões no lugar dos campos em (2), até primeira ordem em Θ

$$\begin{aligned} \hat{\Psi} &= \Psi + \frac{1}{2}\Theta^{MN} A_N \partial_M \Psi + \frac{i}{8}\Theta^{MN}[A_M, A_N]\Psi + \mathcal{O}(\Theta^2) \\ \hat{A}_L &= A_L + \frac{1}{4}\Theta^{MN} A_N\{A_N, \partial_M A_L\} + \frac{1}{4}\Theta^{MN}\{F_{ML}, A_N\} + \mathcal{O}(\Theta^2), \end{aligned} \tag{3}$$

(4)

e ainda teremos

$$A_M = \{A_\mu, \phi\},$$

onde ϕ é um campo escalar. Escrito com auxílio desses campos componentes, o último termo se reduz à

$$\begin{aligned}\epsilon_{ABCDE}\hat{A}^A \star \partial^B \hat{A}^C \star \partial^D \hat{A}^E &= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\Big(\hat{A}^\mu \star \partial^\nu \hat{A}^\alpha \star \partial^\beta \hat{\phi} - \hat{A}^\mu \star \partial^\nu \hat{A}^\alpha \star \partial_5 \hat{A}^\beta \\ &+ \hat{\phi} \star \partial^\mu \hat{A}^\nu \star \partial^\alpha \hat{A}^\beta - \hat{A}^\mu \star \partial^5 \hat{A}^\nu \star \partial^\alpha \hat{A}^\beta\Big).\end{aligned}$$

Expandindo os campos em modos normais, de forma que

$$A_\mu(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_\mu^{(n)}(x^\mu)e^{iny/R}, \quad \phi(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(x^\mu)e^{iny/R}.$$

Escolhemos que a compactificação será feita em um círculo, tal que a identificação $y \to y + 2\pi R$ é feita sobre os campos,

$$\Phi(x, y + 2\pi R) \to e^{2i\pi R\phi}\Phi(x,y),$$

cujo efeito será mudar a expansão em modos normais, pela inclusão da fase ϕ,

$$\Phi(x^\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi^{(n)}(x^\mu)e^{i(n/R+\phi)y}$$

Cuidado especial deve ser tomado com os férmions, para preservar a forma da teoria livre:

$$\bar{\Psi} \star \left[\gamma^5 \frac{\partial}{\partial y} + M(y)\right]\Psi = -m\bar{\Psi} \star \Psi, \tag{5}$$

e para isto faremos a decomposição em duas componentes quirais:

$$\Psi(x^\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\Psi_L^{(n)}(x^\mu)f_L^{(n)}(y) + \Psi_R^{(n)}(x^\mu)f_R^{(n)}(y)],$$

com

$$\begin{aligned}\Psi_L^{(n)} &= \frac{1}{2}(1+\gamma^5)\Psi^{(n)} \\ \Psi_R^{(n)} &= \frac{1}{2}(1-\gamma^5)\Psi^{(n)},\end{aligned}$$

tal que substituindo em (5), obtemos as funções $f_{R,L}^{(n)}(y)$, fixando $m = M - in/R$. Uma das soluções escolhida é

$$\begin{cases} f'^{(n)}_L + Mf_L^(n) = -mf_L^{(n)} \\ f'^{(n)}_R + Mf_R^(n) = -mf_R^{(n)}) \end{cases} \Rightarrow f_L^{(n)} = e^{-iny/R} \text{ assim como } f_R^{(n)} = e^{iny/R}.$$

Os propagadores são obtidos através da inversão da matriz $D_{(n)}D_{(n)}^{-1} = 1$, tal que

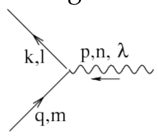
$$\frac{1}{2}(A_\mu^{(n)}\ \phi^{(n)})\begin{bmatrix} \eta_{\mu\nu}(\Box + \frac{n^2}{R^2}) - (1-\lambda)\partial_\mu\partial_\nu & \frac{2in}{R}(1-\lambda)\partial_\mu \\ 0 & \Box + \frac{\lambda n^2}{R^2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix} A_\mu^{(n)} \\ \phi^{(n)}\end{pmatrix}$$

que após a transformação no espaço de momentos e sua inversão fornece:

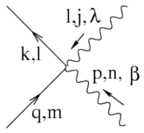
$$D_{(n)}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{k^2 - \frac{n^2}{R^2}}\Delta^{\mu\nu} + \frac{1}{-\lambda k^2 + \frac{n^2}{R^2}}\omega^{\mu\nu} & \frac{2n(1-\lambda)}{R\left(k^2 - \lambda\frac{n^2}{R^2}\right)\left(\lambda k^2 + \frac{n^2}{R^2}\right)}k^\mu \\ 0 & \frac{-3}{k^2 - \frac{n^2}{R^2}} - \frac{1}{k^2 - \lambda\frac{n^2}{R^2}}\end{bmatrix}, \tag{6}$$

onde $\omega^{\mu\nu} = \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}$ e $\Delta^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}$.

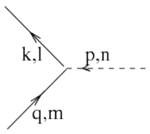
Posto isto, obtemos então algumas das regras de Feynman, relevantes à este estudo, mostradas abaixo:



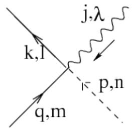
$$\delta_{-l,m,n}\left[e\gamma_\lambda - \frac{ie\gamma_\lambda}{2}(k_\mu q_\nu + p_\mu q_\nu + k_\nu p_\nu)\theta^{\mu\nu} - \frac{iM}{2}\theta^{\mu\nu}\eta_{\nu\lambda}(k_\mu + q_\mu) + \frac{n}{2R}\theta^{\mu\nu}\eta_{\nu\lambda}k_\mu - \frac{i\theta^{\mu\nu}}{2}(k_\mu\gamma_\alpha q^\alpha + q_\mu\gamma^\alpha p_\alpha)\eta_{\lambda\nu}\right]$$



$$\delta_{-l,m,n,j}\left\{-\frac{en}{2R}\theta^{\mu\nu}\gamma^5(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\nu\lambda}\eta_{\mu\beta}) + \frac{e}{2}\theta^{\mu\nu}\gamma^\alpha\left[(2l_\mu + k_\mu + q_\mu)(\eta_{\nu\lambda}\eta_{\alpha\beta} + \eta_{\nu\beta}\eta_{\alpha\lambda}) - p_\alpha(\eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\beta} + \eta_{\nu\lambda}\eta_{\mu\beta})\right]\right\}$$



$$\delta_{-l,m,n}\left[\frac{e\gamma^5\theta^{\mu\nu}}{2}\eta_{\nu\lambda}(k_\mu + 2p_\mu)\right]$$



$$\delta_{-l,m,n}\left[e\gamma^5 - \frac{i}{2}(k_\mu q_\nu + p_m u q_\nu + k_\nu p_\nu)\theta^{\mu\nu}\right]$$

II. PLANO DE TRABALHO

Os próximos passos deste estudo são:

- computar a amplitude de espalhamento de Born $q + \bar{q} \to \mu^+ + \mu^-$, obter o quadrado e soma sobre spin e cor, usando computação algébrica [4];
- a obtenção da amplitude de espalhamento hadrônica e posterior integração no espaço de fase usando o método de Monte Carlo, obtendo a amplitude de espalhamento do processo Drell-Yan;
- o mesmo programa deve fornecer a saída no formato `HepMC` para que possa ser lido para simulação no CMSSW, o software utilizado pela colaboração do CMS;
- análise dos "backgrounds"possíveis do modelo padrão e estudo das possibilidade de detecção de eventos no CMS.

[1] L. Randall and R. Sundrum, “A large mass hierarchy from a small extra dimension,” Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999) [arXiv:hep-ph/9905221].

[2] B. Zwiebach, “A first course in string theory,” *Cambridge, UK: Univ. Pr. (2004) 558 p*

[3] K. S. Choi and J. E. Kim, Quarks and Leptons From Orbifolded Superstring, Lect. Notes Phys. 696, Springer, Berlim Heidelberg (2006)

[4] J. Vollinga, “GiNaC: Symbolic computation with C++,” Nucl. Instrum. Meth. A **559**, 282 (2006) [arXiv:hep-ph/0510057].