Cinemática Relativística

São Paulo, 2009
Matheus Ichimaru Bedendo

Referências

[1] LANDAU, L. e LIFCHITZ, E. *Teoria do Campo.* São Paulo: Hemus, 2004.

[2] BYCKLING, E. e KAJANTIE, K. *Particle Kinematics.* New York: John Wiley & Sons,1973.

[3] HAGEDORN, R. *Relativistic Kinematics.* New York: W.A. Benjamin, Inc.,1963

[4] LANDAU, L. e LIFCHITZ, E. *Mecânica.* São Paulo: Hemus, 2004.

[5] *Cinemática Relativística.* NOVAES, S. F. Instituto de Física Teórica, Unesp.

[6] *Relativistic Kinematics.* ÖSTERBERG, K. University of Helsinki.

Outline

1 Evento e intervalo

- Elemento de linha invariante
- Intervalos do tipo temporal e espacial
- Cone de luz
- Tempo próprio

2 Transformação de Lorentz

- Interpretação geométrica da T.L.
- Quadrivetores
- Produto escalar
- Quadrivelocidade

3 Mecânica relativística

- Princípio de mínima ação
- Energia e momento
- Quadrimomento

4 Digressão sobre formalismo

- Notação covariante e contravariante
- Sistema natural de unidades

O u t l i n e

5 Aplicações da T.L.

Transformação de ângulos

Rapidez

6 Sistemas de referência

Sistemas

Transformações: LAB $\longrightarrow$ CM

Função cinemática

Uso de invariantes

7 Decaimento de partículas

Decaimento em 2 corpos

Decaimento em 3 corpos

Referencial r

8 Espalhamento 2→2

Variáveis de Mandelstam

1 Evento e intervalo

2 Transformação de Lorentz
3 Mecânica relativística
4 Formalismo e notação
5 Sistemas de referência

Caracterizamos um *evento* em um referencial inercial R, como um ponto no espaço-tempo, de coordenadas (t,x,y,z). Em outro referencial inercial R' o mesmo ponto possui coordenadas (t',x',y',z').

Consideremos agora dois eventos no referencial R: a emissão de um sinal com velocidade de propagação c do ponto (x_1,y_1,z_1) no instante t_1; e a chegada do sinal ao ponto (x_2,y_2,z_2) no instante t_2. Podemos calcular a distância percorrida pelo sinal como sendo:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1.1)$$

ou então:

$$d = c(t_2 - t_1) \qquad (1.2)$$

igualando (1.1) e (1.2) obtemos o seguinte resultado para o referencial R:

$$c^2(t_2 - t_1)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \qquad (1.3)$$

e com raciocínio análogo obteríamos para o referencial R':

$$c^2(t'_2 - t'_1)^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2 \qquad (1.4)$$

Supondo agora que c tem o mesmo valor em ambos os referenciais podemos isolá-lo nas equações (1.3) e (1.4) de forma a encontrar uma expressão que relacione as coordenadas dos eventos nos dois referenciais considerados.

$$[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2] \cdot \left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 \qquad (1.5)$$

Agora sendo x_1, y_1, z_1, t_1 e x_2, y_2, z_2, t_2 as coordenadas de dois eventos quaisquer em um referencial inercial R, podemos definir a quantidade:

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \qquad (1.6)$$

chamada de *intervalo* dos dois eventos. Para outro referencial inercial R' o intervalo construído teria a forma:

$$s'_{12} = \sqrt{c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2} \qquad (1.7)$$

Notemos agora que se o intervalo s_{12}=0 obtemos a seguinte expressão para c:

$$c^2 = \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{(t_2 - t_1)^2} \tag{1.8}$$

que se substituirmos em (1.7) nos fornece a igualdade:

$$s_{12}'^{\,2} = \boxed{\left[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\right] \cdot \left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2} - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 \tag{1.9}$$

$$(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2$$

mas pelo resultado obtido em (1.5) vemos que s'_{12} também deve se anular.

$$\therefore \quad s'_{12} = 0$$

Notemos que o resultado de (1.5) foi obtido ao considerar-se c invariante, desta forma é uma consequência direta da invariância da velocidade da luz que se o intervalo de dois eventos é nulo em um referencial inercial ele também o será em qualquer outro referencial igualmente inercial.

Introduzimos agora a variável:

$$\tau = ict \tag{1.10}$$

onde $i = \sqrt{-1}$. Agora se considerarmos intervalos infinitesimais, podemos escrever a expressão de (1.6) como:

$$ds^2 = -(dx^2 + dy^2 + dz^2 + d\tau^2) \tag{1.11}$$

Como vimos anteriormente $ds=0$ em um referencial inercial acarreta $ds'=0$ em qualquer outro referencial. Por serem ambos infinitésimos de mesma ordem devemos ter:

$$ds = a \cdot ds' \tag{1.12}$$

onde a é um coeficiente que só deve depender do valor absoluto da velocidade relativa entre os dois referenciais, i.e. $a=a(v)$.

Imaginemos agora três referenciais R, R_1 e R_2, onde $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$ são as velocidades de R_1 e R_2 com relação à R e $\boldsymbol{v_{12}}$ a velocidade de R_2 com relação à R_1.

Nesse caso a igualdade de (1.12) se escreve:

$$ds = a(v_1) \cdot ds_1 \qquad ds = a(v_2) \cdot ds_2 \qquad ds_1 = a(v_{12}) \cdot ds_2$$

Das duas primeiras igualdades obtemos:

$$ds_1 = \frac{a(v_2)}{a(v_1)} \cdot ds_2$$

que se comparada à terceira nos fornece:

$$\frac{a(v_2)}{a(v_1)} = a(v_{12})$$

Notemos agora que v_{12} depende não somente dos módulos de $\boldsymbol{v_1}$ e $\boldsymbol{v_2}$ mas também do ângulo formado entre eles. Todavia essa dependência angular não existe no primeiro termo da equação acima, de forma que somos levados a concluir que $a(v)$ deve ser constante e igual à um.

$$\therefore \quad ds = ds'$$

E considerando intervalos finitos teremos:

$$s = s' \tag{1.13}$$

que expressa matematicamente o fato de o intervalo, assim como definido em (1.6), ser a quantidade invariante em relatividade restrita, i.e. qualquer observador em qualquer referencial inercial medirá o mesmo valor para o intervalo entre dois eventos dados.

Ainda sendo x_1, y_1, z_1, t_1 e x_2, y_2, z_2, t_2 as coordenadas de dois eventos quaisquer no referencial R, iremos procurar por um referencial no qual ambos os eventos tenham ocorrido num mesmo ponto do espaço.

Chamando (no referencial R) de t_{12} o intervalo de tempo decorrido entre os eventos, e de l_{12} a distância entre as posições em que ocorreram temos que:

$$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 \tag{1.14}$$

Da mesma forma, teremos para um referencial R':

$${s'_{12}}^2 = c^2 {t'_{12}}^2 - \overset{0}{\cancel{{l'_{12}}^2}} \tag{1.15}$$

Mas como queremos que os eventos tenham ocorrido num mesmo ponto do espaço no referencial R' devemos assumir l'_{12}=0.

Como visto em (1.12) o intervalo é invariante, desta forma temos que:

$$s_{12}^2 = {s'_{12}}^2 \implies s_{12}^2 = c^2 {t_{12}}^2 - {l_{12}}^2 = c^2 {t'_{12}}^2$$

mas $c^2t'_{12}{}^2$ é sempre positivo, portanto $s_{12}{}^2>0$, o que quer dizer que o intervalo deve ser real. Intervalos reais são chamados de intervalos do tipo *temporal*.

Se quisermos encontrar agora um referencial onde os eventos ocorreram simultaneamente, e fizermos considerações análogas às anteriores obteremos:

$$s_{12}^2 = c^2t_{12}{}^2 - l_{12}{}^2 = -l'_{12}{}^2 \tag{1.16}$$

mas $l'_{12}{}^2$ é sempre positivo, portanto $s_{12}{}^2<0$, o que quer dizer que o intervalo deve ser imaginário. Intervalos imaginários são chamados de intervalos do tipo *espacial*.

Vale ressaltar que por ser o intervalo invariante, sua classificação em do tipo temporal ou espacial é absoluta, i.e. vale para qualquer referencial inercial que se escolha.

Seja agora um evento O que tomamos como origem de nossas coordenadas. E façamos uma representação simplista considerando apenas uma das coordenada espaciais, por exemplo x, como se vê na figura a seguir.

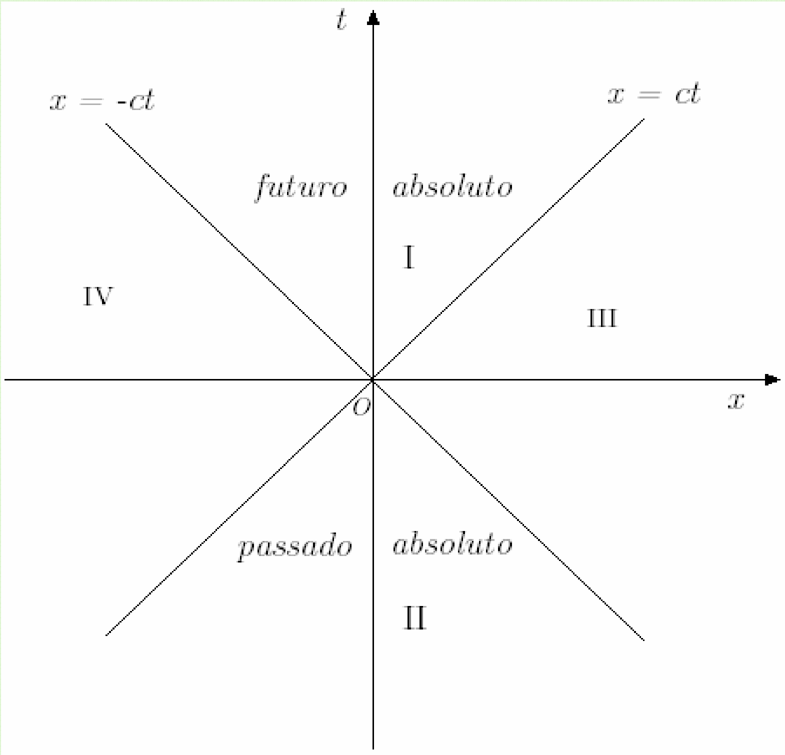


Figura 1: Cone de luz considerando apenas a coordenada x.

Os pontos das retas traçadas na figura 1 satisfazem à equação:

$$x^2 = c^2t^2 \qquad (1.17)$$

Já os pontos das regiões I e II satisfazem à inequação:

$$c^2t^2 - x^2 > 0 \qquad (1.18)$$

enquanto que para os demais pontos:

$$c^2t^2 - x^2 < 0 \qquad (1.19)$$

Vemos por (1.18) que o intervalo entre eventos da região I ou II e o evento O é do tipo temporal.

E por (1.19) vemos que o intervalo entre eventos da região III ou IV e o evento O é do tipo espacial.

Na região I, porém, temos que $t>0$, o que resulta que todos os eventos dessa região ocorrem *depois* de O, e portanto a chamamos de *futuro absoluto.*

Contrariamente, temos que em II, $t<0$, e portanto todos os eventos nessa região ocorrem *antes* de O, de forma que a chamamos de *passado absoluto*.

Já para as regiões III e IV dá-se o nome de *regiões absolutamente remotas* em relação à O, e para qualquer evento nelas contido é possível encontrar-se referenciais onde esse evento tenha ocorrido simultaneamente à O, antes de O e depois de O.

Se tivéssemos considerado as três coordenadas espaciais ao invés de somente uma, teríamos na figura 1 ao invés de retas concorrentes um cone, se tomássemos as coordenadas espaciais da equação:

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \tag{1.20}$$

sempre aos pares, desprezando-se a coordenada restante.

Imaginemos agora uma situação envolvendo dois relógios; onde um permanece em repouso com relação à nós e o outro realiza um movimento arbitrário, que pode ser considerado uniforme a cada instante de tempo dt medido no nosso referencial, que chamaremos de *referencial de repouso.*
Para o referencial em repouso em um itervalo de tempo dt o relógio em movimento percorre uma distância:

$$d = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \tag{1.21}$$

para um referencial fixo à esse relógio essa distância é nula e o intervalo decorrido é dt'.
Em decorrência da invariança do intervalo teremos:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2 \tag{1.22}$$

e isolando os termos adequadamente chegamos à:

$$\frac{ds}{c} = dt' = dt\sqrt{1 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2dt^2}} \tag{1.23}$$

de onde podemos identificar o termo:

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = v^2 \tag{1.24}$$

de forma a obter:

$$\frac{ds}{c} = dt' = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{1.25}$$

e por conveniência poderemos nos referir aos termos:

$$\beta = \frac{v}{c} \qquad \gamma = \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2} \tag{1.26}$$

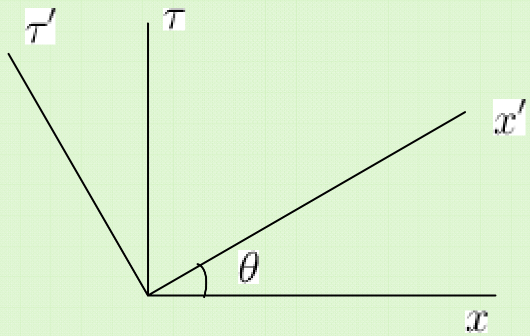
sendo o último chamado na literatura de *fator de Lorentz.*

1 Evento e intervalo

2 Transformação de Lorentz

3 Mecânica relativística
4 Formalismo e notação
5 Sistemas de referência
6 Decaimento

A transformação que exprime as coordenadas x', y', z', τ' de um evento num referencial R' em função das coordenadas x, y, z, τ do mesmo evento num referencial R deve ser uma rotação do espaço quadridimensional x, y, z, τ.
Se considerarmos que R' se move, com relação à R, ao longo do eixo x com velocidade constante $\boldsymbol{V}$, então a transformação procurada não deve afetar as coordenadas y e z, e portanto deve ser somente uma rotação do plano $x\tau$ de um ângulo arbitrário θ.



Nessas circunstâncias (rotação de um plano) sabemos que a relação entre as coordenadas do plano inicial e as coordenadas do plano rotacionado é dada por:

$$\begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ \tau' \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Como o movimento considerado é o da origem do referencial R' com relação à R temos que x'=0. E a relação anterior reduz-se à:

$$x = -\tau' sen\theta \qquad \tau = \tau' cos\theta \tag{2.2}$$

Lembrando da definição de τ podemos obter as seguintes relações de (2.2):

$$sen\theta = \frac{x}{-ict'} = \frac{ix}{ct\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad \Longrightarrow \quad sen\theta = i\frac{\gamma V}{c} \tag{2.3}$$

$$cos\theta = \frac{ict}{ict\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \quad \Longrightarrow \quad cos\theta = \gamma \tag{2.4}$$

Substituindo agora as expressões de (2.3) e (2.4) na equação matricial de (2.1) obtemos:

$$\begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -i\gamma\frac{V}{c} \\ i\gamma\frac{V}{c} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ \tau' \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

o que implica nas seguintes transformações:

$$x = \gamma\left(x' - i\frac{V}{c}ict'\right) = \gamma\left(x' + Vt'\right) \tag{2.6}$$

$$ict = \gamma\left(i\frac{V}{c}x' + ict'\right) = \gamma ic\left(\frac{V}{c^2}x' + t'\right) \tag{2.7}$$

que são de fato as transformações procuradas. De maneira sintética podemos escrever as transformações de Lorentz de R' para R como:

$$x = \gamma\left(x' + Vt'\right) \; ; \; y = y' \; ; \; z = z' \; ; \; t = \gamma\left(t' + \frac{V}{c^2}x'\right) \tag{2.8}$$

E as transformações inversas (R para R') como:

$$x' = \gamma\,(x - Vt) \;\; ; \;\; y' = y \;\; ; \;\; z' = z \;\; ; \;\; t' = \gamma\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \tag{2.9}$$

Exercícios

2.1 Mostre, explicitamente, que o intervalo entre dois eventos é invariante ante transformações de Lorentz. (bom pra treinar)

2.2 Verifique que no limite que $c >> V$ as transformações de Lorentz se reduzem às já conhecidas transformações de Galilei. (besta)

2.3 Verifique que as transformações de Galilei não preservam o intervalo entre dois eventos invariante. (interessante)

Denotaremos o quadrivetor posição de uma partícula em um dado referencial R pela quádrupla x^{μ}, onde μ=1,2,3,4.

$$x^{\mu} = (x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, \tau) = (\vec{x}, ict) \qquad (2.10)$$

Como vimos em (2.5) as coordenadas do quadrivetor acima transformam-se, sob Lorentz, através das relações:

$$x^1 = \gamma\left(x'^1 - i\frac{V}{c}x'^4\right) \;;\; x^2 = x'^2 \;;\; x^3 = x'^3 \;;\; x^4 = \gamma\left(x'^4 + i\frac{V}{c}x'^1\right) \qquad (2.11)$$

De uma forma genérica designaremos por quadrivetor a^{μ} uma série de 4 quantidades a^1, a^2, a^3, a^4 que quando duma mudança de coordenadas transforma-se como x^{μ}. Desta forma sob uma T.L. teremos:

$$a^1 = \gamma\left(a'^1 - i\frac{V}{c}a'^4\right) \;;\; a^3 = a'^3 \;;\; a^2 = a'^2 \;;\; a^4 = \gamma\left(a'^4 + i\frac{V}{c}a'^1\right) \qquad (2.12)$$

Tomando o quadrivetor posição de (2.10) e derivando com relação ao tempo próprio obtemos:

$$\frac{dx^\mu}{dt'} = \frac{dx^\mu}{dt} \cdot \frac{dt}{dt'} \tag{2.15}$$

mas da expressão obtida para o tempo próprio em (1.25):

$$dt' = \frac{dt}{\gamma} \tag{2.16}$$

vemos que a igualdade de (2.14) se reduz à:

$$\frac{dx^\mu}{dt'} = \gamma \boxed{\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, \frac{d\tau}{dt}\right)} = \gamma\left(v_x, v_y, v_z, ic\right) \tag{2.17}$$

e construímos portanto a *quadrivelocidade* da partícula expressa por:

$$u^\mu = \gamma(\vec{v}, ic) \tag{2.18}$$

O produto escalar de dois 4-vetores, analogamente ao caso dos 3-vetores, será dado por:

$$a^\mu \cdot b^\mu = a^1 \cdot b^1 + a^2 \cdot b^2 + a^3 \cdot b^3 + a^4 \cdot b^4 \qquad (2.13)$$

e vemos facilmente que é um escalar.

Exercícios

2.4 Mostre que duas transformações de Lorentz paralelas e consecutivas (e.g. $R_1 \rightarrow R_2$, $R_2 \rightarrow R_3$) podem ser interpretadas como uma única transformação, da forma apresentada em (2.8), com parâmetros:

$$\bar{\gamma} = \gamma_{32}\gamma_{21}\left(1 + \frac{V_{32}V_{21}}{c^2}\right) \qquad (2.14) \qquad\qquad \bar{V} = \frac{V_{32} + V_{21}}{1 + \frac{V_{32}V_{21}}{c^2}} \qquad (2.15)$$

1 Evento e intervalo
2 Transformação de Lorentz

3 Mecânica relativística

4 Formalismo e notação
5 Sistemas de referência
6 Decaimento
7 Espalhamento 2→2

Como ponto de partida devemos escrever a ação para uma partícula material livre, i.e. uma partícula de massa m na ausência de forças externas. Tal ação deve ter a forma:

$$S = -\alpha \int_a^b ds \tag{3.1}$$

Em seguida usando a expressão para ds obtida em (3.1), reescrevemos a ação como:

$$S = -\alpha \int_{t_1}^{t_2} dt \cdot c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{3.2}$$

de onde podemos identificar a lagrangiana do sistema como sendo:

$$L = -\alpha c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{3.3}$$

Mas devemos agora especificar o valor da constante α, e para isso iremos desenvolver a lagrangiana de (3.3) em séries de potência de v/c, e em seguida tomar o limite quando $c \to \infty$ para compará-la com a expressão da lagrangiana clássica. Nesse regime temos:

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots \qquad \Longrightarrow \qquad L \approx \cancel{-\alpha c} + \frac{\alpha v^2}{2c}$$

desprezando a constante $-\alpha c$ obtemos uma lagrangiana que gera as mesmas equações de movimento e é, portanto, equivalente à apresentada acima. Comparando então a nova lagrangiana com a clássica obtemos o valor de α.

$$\underset{cl\acute{a}ssica}{L = \frac{mv^2}{2}} \qquad \underset{nova}{L = \frac{\alpha v^2}{2c}} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = mc$$

Dessa forma podemos por fim escrever a lagrangiana e a ação para uma partícula material livre como sendo:

$$S = -mc\int_a^b ds \quad (3.4) \qquad L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \quad (3.5)$$

Sabemos do formalismo lagrangiano da mecânica clássica, que dada a lagrangiana L do sistema, grandezas tais como a energia e o momento podem ser obtidas através das relações que se seguem:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (3.6) \qquad\qquad E = \vec{p}\cdot\vec{v} - L \quad (3.7)$$

Portanto utilizando a lagrangiana de (3.5) escrita como função das componentes do vetor velocidade, e procedendo os cálculos sugeridos em (3.6) construímos o vetor momento da partícula.

$$L(v_x, v_y, v_z) = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{c^2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_\diamond} = \frac{m v_\diamond}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \Longrightarrow \quad \vec{p} = m\gamma\vec{v} \quad (3.8)$$

E dessa forma a expressão para a energia se torna:

$$E = m\gamma v^2 + \frac{mc^2}{\gamma} \quad \Longrightarrow \quad E = \gamma\left(mv^2 + mc^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right)$$

$$\Longrightarrow \quad E = m\gamma c^2 \quad (3.9)$$

Interessante notar na expressão acima que mesmo em repouso (v=0 ou γ=1) a energia da partícula não se anula, tornando-se:

$$E = mc^2 \tag{3.10}$$

chamada de *energia de repouso* da partícula.
Devemos atentar para o fato de que em nenhum momento tratamos a partícula em questão como *elementar*, de forma que todo o desenvolvimento realizado aplica-se igualmente à um corpo complexo, constituído por um grande número de partículas.

Devemos também ter em mente que a energia de repouso de um corpo complexo compreende além das energias de repouso de suas partículas constituintes, suas energias cinéticas e de ligação.
Isso quer dizer que $\sum m_a c^2$, onde m_a são as massas das partículas constituintes, não é igual à mc^2, ou ainda, que $\sum m_a$ não é igual à massa total do objeto, de forma que em mecânica relativística não mais existe a lei de conservação da massa.

Agora quadremos as expressões de (3.8) e (3.9) e comparemos os termos de forma a obtermos uma expressão que relacione E e p.

$$p^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad p^2 = \frac{m^2 v^2 c^2}{c^2 - v^2} \qquad v^2 (m^2 c^2 + p^2) = p^2 c^2 \qquad v^2 = \frac{p^2 c^2}{m^2 c^2 + p^2}$$

$$E^2 = \frac{m^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \qquad \frac{E^2}{c^2} = \frac{m^2 c^4}{c^2 - v^2} \qquad \frac{E^2}{c^2} = \frac{m^2 c^4}{c^2 - \frac{p^2 c^2}{m^2 c^2 + p^2}} \qquad \frac{E^2}{c^2} = \frac{m^2 c^4 (m^2 c^2 + p^2)}{m^2 c^4 + p^2 c^2 - p^2 c^2}$$

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (3.11)$$

Façamos agora uma variação da ação expressa em (3.4):

$$\delta S = -mc\delta \int_a^b ds$$

E lembremos que pelas definições feitas podemos escrever:

$$ds = \sqrt{-dx^{\mu 2}}$$

Dessa forma nossa expressão para a variação da ação fica:

u^μ

$$\delta S = -mc\delta \int_a^b \sqrt{-dx^{\mu 2}} \implies \delta S = mc\delta \int_a^b \frac{dx^\mu dx^\mu}{ds} \implies \delta S = mc\delta \int_a^b \frac{dx^\mu dx^\mu}{c dt'}$$

$$\implies \delta S = m \int_a^b u^\mu \delta dx^\mu$$

realizando agora uma integração por partes na última expressão temos:

$$\delta S = \cancel{m u^{\mu} \delta x^{\mu} \Big|_a^b} - m \int_a^b \frac{du^{\mu}}{ds} \delta x^{\mu} ds \qquad (3.12)$$

mas como os extremos a e b devem ser fixos o primeiro termo da expressão acima se anula.

E como a variação da ação também deve ser um extremo devemos ter:

$$\delta S = 0 \Longrightarrow -m \int_a^b \frac{du^{\mu}}{ds} \delta x^{\mu} ds = 0 \Longrightarrow \frac{du^{\mu}}{ds} = 0 \Longrightarrow \frac{du^{\mu}}{dt'} = 0 \qquad (3.13)$$

que é a expressão matemática para a constância da velocidade de uma partícula livre.

Agora queremos obter a variação da ação como função das coordenadas da partícula, para isso devemos fixar a extremidade em a e tornar b variável. Por simplicidade iremos chamar $(\delta x^{\mu})_b = \delta x^{\mu}$, e dessa forma a expressão de (3.12), juntamente com o resultado obtido em (3.13), se torna:

$$\delta S = m u^{\mu} \delta x^{\mu} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\delta S}{\delta x^{\mu}} = m u^{\mu}$$

mas pela definição da notação δ, $\delta A = \dfrac{\partial A}{\partial \epsilon} d\epsilon$ podemos escrever a expressão acima como:

$$\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}} = m u^{\mu} \tag{3.14}$$

agora batizando a quantidade $m u^{\mu} = p^{\mu}$ e lembrando dos conhecimentos de mecânica que:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E \qquad \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i$$

obtemos o quadrivetor de coordenadas:

$$p^{\mu} = \left(p_x, p_y, p_z, i\frac{E}{c} \right) \tag{3.15}$$

chamado de *quadrimomento* da partícula e usualmente expresso na forma:

$$p^\mu = \left(\vec{p}, i\frac{E}{c}\right) \tag{3.16}$$

1 Evento e intervalo
2 Transformação de Lorentz
3 Mecânica relativística

4 Digressão sobre formalismo

5 Sistemas de referência
6 Decaimento
7 Espalhamento 2→2
8 Título oito

Outra forma, igualmente adequada, de denotar o quadrivetor posição é a seguinte:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) \tag{4.1}$$

Nessa convenção, a quadrivelocidade se escreve como:

$$u^\mu = \gamma(c, \vec{v}) \tag{4.2}$$

e o quadrimomento como:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \tag{4.3}$$

E se realizarmos uma T.L. de um referencial R' (que se move com velocidade constante $\boldsymbol{V}$ ao longo do <u>eixo z</u>) para um referencial R, as componentes de x^μ transformar-se-ão da seguinte forma:

$$x^0 = \gamma\left(x'^0 + \frac{V}{c}x'^3\right) \; ; \; x^1 = x'^1 \; ; \; x^2 = x'^2 \; ; \; x^3 = \gamma\left(x'^3 + \frac{V}{c}x'^0\right) \tag{4.4}$$

Como um 4-vetor genérico transforma-se como x^{μ}, teremos que um a^{μ}, sob a mesma T.L. transformar-se-á como:

$$a^0 = \gamma\left(a'^0 + \beta a'^3\right) \quad ; \quad a^1 = a'^1 \quad ; \quad a^2 = a'^2 \quad ; \quad a^3 = \gamma\left(a'^3 + \beta a'^0\right) \tag{4.5}$$

Introduzindo agora o tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

temos que:

$$a_{\mu} = g_{\mu\nu} a^{\nu} \tag{4.7}$$

Onde a_{μ} e a^{μ} são chamadas de componentes *covariantes* e *contravariantes*, respectivamente. Vemos da identidade acima (4.7) que:

$$a_0 = a^0 \quad ; a_1 = -a^1 \; ; \; a_2 = -a^2 ; \; a_3 = -a^3 \tag{4.8}$$

Com o uso dessa notação estabelecida denotaremos o produto escalar entre dois 4-vetores por:

$$a \cdot b \equiv \sum_{\mu=0}^{3} a^{\mu} b_{\mu} = g_{\mu\nu} a^{\mu} b^{\nu} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^0 b^0 - \vec{a} \cdot \vec{b} \qquad (4.9)$$

Exercícios

4.1 Mostre que o produto escalar entre quaisquer dois quadrivetores $p_1 \cdot p_2 = E_1 \cdot E_2 - \boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2$ é invariante ante transformações de Lorentz.

De agora em diante iremos considerar $c=1$, de acordo com as convenções estabelecidas pelo sistema natural de unidades.

Dessa forma os quadrivetores postos anteriormente se tornam:

$$x^\mu = (t, \vec{x}) \qquad u^\mu = \gamma(1, \vec{v}) \qquad p^\mu = (E, \vec{p}) \tag{4.10}$$

E as expressões obtidas para o momento e a energia de uma partícula de massa m ficam:

$$\vec{p} = m\gamma\vec{v} \qquad E = m\gamma \qquad E^2 = p^2 + m^2 \tag{4.11}$$

e pela última expressão podemos ver que o quadrado do quadrimomento de uma partícula satisfaz:

$$p^{\mu 2} = p^\mu p_\mu = E^2 - ||\vec{p}||^2 = m^2 \tag{4.12}$$

1 Evento e intervalo
2 Transformação de Lorentz
3 Mecânica relativística
4 Digressão sobre formalismo

5 Aplicações da T.L.

6 Sistemas de referência
7 Decaimento
8 Espalhamento 2→2
9 Título nove

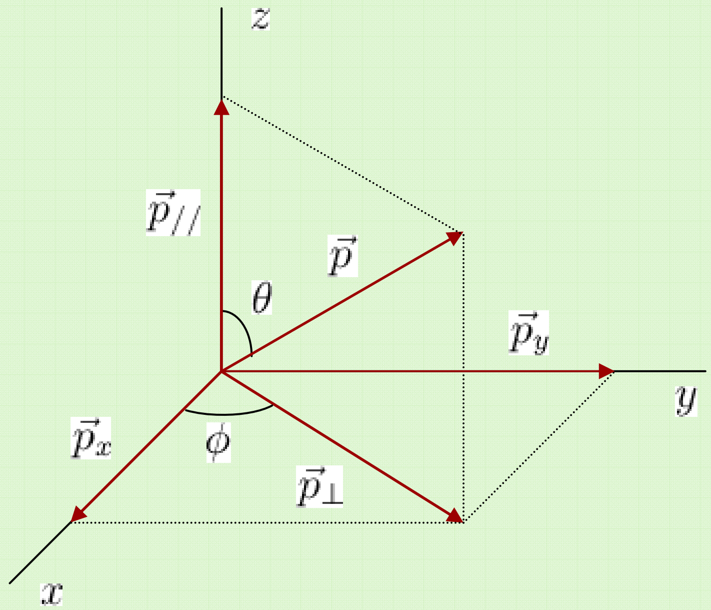
Como iremos tratar na maioria dos casos transformações ao longo do eixo z, definiremos as componentes *transversal* e *longitudinal* do momento $\boldsymbol{p}$ da partícula, como:

$$p_\perp = \sqrt{{p_x}^2 + {p_y}^2} = ||\vec{p}|| \sin\theta \qquad p_{//} = p_z = ||\vec{p}|| \cos\theta \tag{5.1}$$

Dessa forma a energia e o momento da partícula vistos num sistema que se move ao longo do eixo z com velocidade constante $\boldsymbol{\beta}_s$ serão dados por:

$$p'_\perp = p_\perp \tag{5.2}$$

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_{//} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s & -\gamma_s\beta_s \\ -\gamma_s\beta_s & \gamma_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{//} \end{pmatrix} \tag{5.3}$$



Com relação ao ângulo azimutal teremos a seguinte relação:

$$\tan\phi' = \frac{p'_y}{p'_x} = \frac{p_y}{p_x} = \tan\phi \quad \Rightarrow \quad \phi' = \phi \qquad (5.4)$$

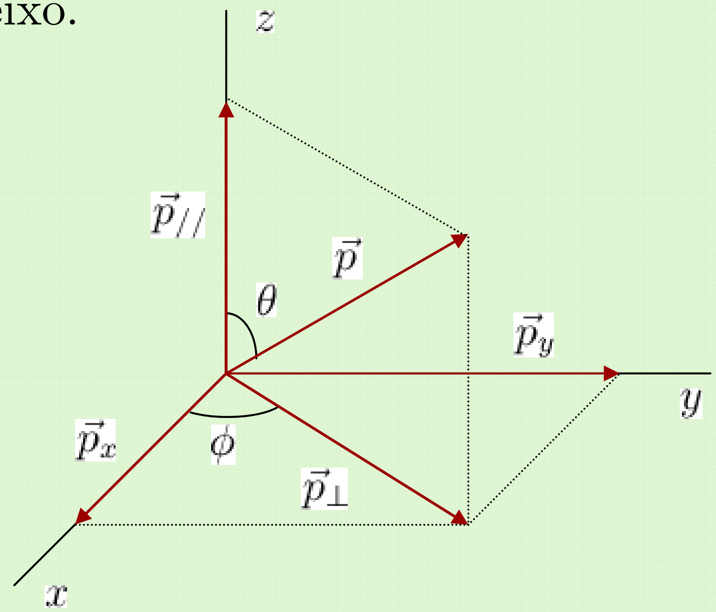
e vemos que o ângulo azimutal ao redor de um eixo é invariante ante transformações de Lorentz ao longo deste eixo.

Já para o ângulo zenital teremos:

$$\tan\theta' = \frac{p'_\perp}{p'_{//}} = \frac{p_\perp}{p'_{//}} \qquad (5.5)$$

mas pela transformação (5.3) obtemos:

$$\tan\theta' = \frac{p_\perp}{\gamma_s\left(p_{//} - E\beta_s\right)} \qquad (5.6)$$



Multiplicando e dividindo o termo da direita na expressão por $1/p$ obtemos:

$$\tan\theta' = \frac{\overbrace{p_\perp/p}^{\sin\theta}}{\gamma_s\left(\underbrace{\frac{p_{//}}{p}}_{\cos\theta} - \underbrace{\frac{E\beta_s}{p}}_{v^{-1}}\right)} \tag{5.7}$$

de onde podemos identificar termos já conhecidos expressos pelas relações (4.11) e (5.1), de forma a obter a seguinte transformação:

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma_s\left(\cos\theta - \beta_s/v\right)} \tag{5.8}$$

e sua inversa:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma_s\left(\cos\theta' + \beta_s/v'\right)} \tag{5.9}$$

Introduzimos agora o conceito de rapidez escrevendo a transformação (5.3) na seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_{//} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\xi & -\sinh\xi \\ -\sinh\xi & \cosh\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{//} \end{pmatrix} \tag{5.10}$$

de onde podemos identificar os termos:

$$\begin{matrix} \cosh\xi = \gamma_s \\ \sinh\xi = \gamma_s\beta_s \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \tanh\xi = \beta_s \tag{5.11}$$

Lembrando agora que valem as seguintes relações:

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \tag{5.12}$$

podemos escrever a rapidez nas formas:

$$\xi = \cosh^{-1}\gamma_s = \ln\left(\gamma_s + \sqrt{\gamma_s{}^2 - 1}\right) = \ln(\gamma_s + \gamma_s\beta_s) \tag{5.13}$$

$$\xi = \tanh^{-1}\beta_s = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta_s}{1-\beta_s}\right) \tag{5.14}$$

Notemos que se a partícula estiver parada com relação ao sistema de referência $\boldsymbol{\beta}_s = \boldsymbol{v}$ e portanto $\theta = 0$. Lembrando ainda que vale a relação:

$$E \pm p_{//} = m\gamma \pm p\cos\theta = m\gamma \pm m\gamma v = m\gamma(1 \pm \beta_s) \tag{5.15}$$

podemos escrever a rapidez expressa em (5.14) na seguinte forma:

$$\xi = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{E + p_{//}}{E - p_{//}}\right) \tag{5.16}$$

Pelo resultado (2.15) do exercício 2.4 vemos que podemos escrever:

$$\beta_3 = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \tag{5.17}$$

desta forma em termos da rapidez teremos:

$$\beta_3 = \tanh \xi_3 = \frac{\tanh \xi_1 + \tanh \xi_2}{1 + \tanh \xi_1 \tanh \xi_2} = \frac{\frac{\sinh \xi_1}{\cosh \xi_1} + \frac{\sinh \xi_2}{\cosh \xi_2}}{1 + \frac{\sinh \xi_1}{\cosh \xi_1}\frac{\sinh \xi_2}{\cosh \xi_2}}$$

$$= \frac{\frac{\sinh \xi_1 \cosh \xi_2 + \sinh \xi_2 \cosh \xi_1}{\cosh \xi_1 \cosh \xi_2}}{\frac{\cosh \xi_1 \cosh \xi_2 + \sinh \xi_2 \sinh \xi_1}{\cosh \xi_1 \cosh \xi_2}} = \frac{\sinh(\xi_1 + \xi_2)}{\cosh(\xi_1 + \xi_2)} = \tanh(\xi_1 + \xi_2)$$

$$\Longrightarrow \xi_3 = \xi_1 + \xi_2 \tag{5.18}$$

e vemos portanto que a rapidez é aditiva sob transformações de Lorentz paralelas.

2 Transformação de Lorentz
3 Mecânica relativística
4 Digressão sobre formalismo
5 Aplicações da T.L.

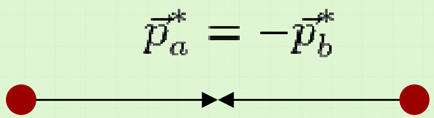
6 Sistemas de referência

7 Decaimento
8 Espalhamento 2→2
9 Título nove
10 Título dez

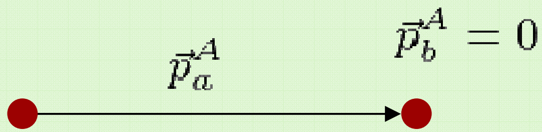
Consideraremos processos onde há a colisão de duas partículas a e b com respectivos quadrimomentos:

$$P_a = (E_a, \vec{p}_a) \qquad\qquad P_b = (E_b, \vec{p}_b) \tag{6.1}$$

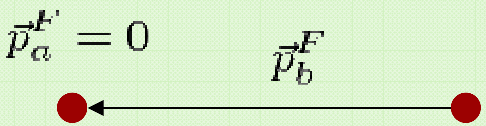
Na descrição destes processos os sistemas de referência mais utilizados são:



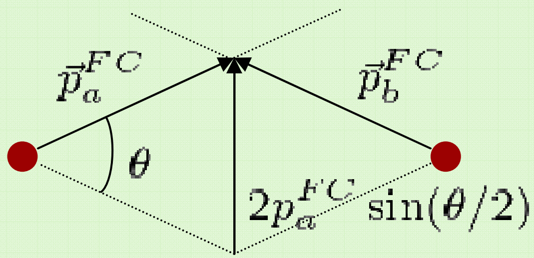
Sistema do centro de massa



Sistema do alvo



Sistema do feixe

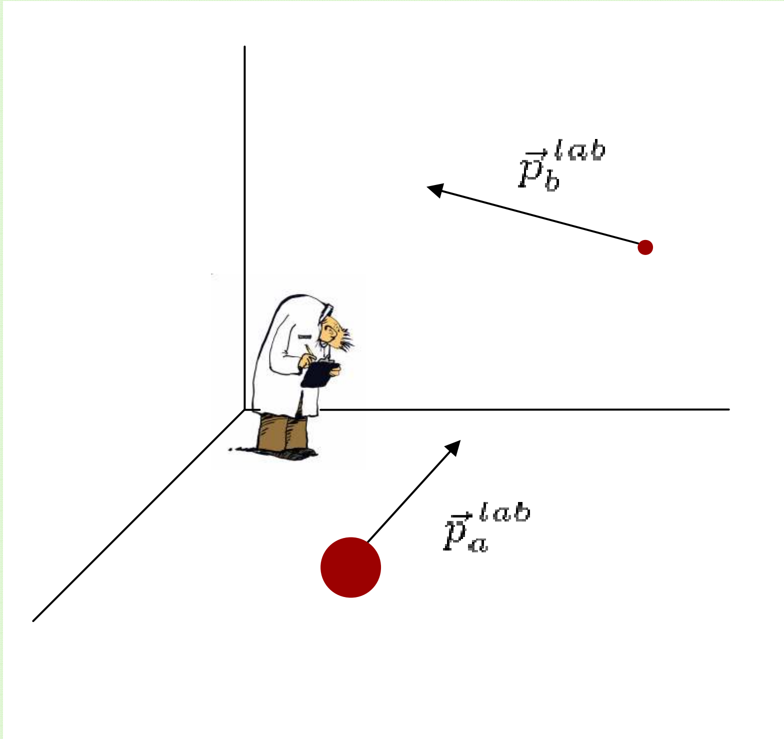


Sistema do feixe de colisão

Além destes, utilizamos também com frequência, o sistema do laboratório; aquele no qual são feitas as medidas.

Em experimentos de alvo fixo o sistema do laboratório coincide com o sistema do alvo.

Nos experimentos de anéis de colisão, onde feixes de partículas idênticas colidem em direções opostas, o sistema do laboratório coincide com o sistema do centro de massa.



Sistema do laboratório

Escolhendo o eixo z como a direção do movimento, os quadrimomentos das partículas, em relação ao CM, podem ser escritos como:

$$P_a^* = (E_a^*, 0, 0, p_a^*) \qquad P_b^* = (E_b^*, 0, 0, -p_a^*) \tag{6.2}$$

e em relação ao LAB:

$$P_a^{lab} = (E_a^{lab}, 0, 0, p_a^{lab}) \qquad P_b^{lab} = (m_b, 0, 0, 0) \tag{6.3}$$

assim as transformações de Lorentz do LAB para o CM se escrevem:

$$i = a, b \qquad \begin{aligned} E_i^* &= \gamma_{cm} \left(E_i^{lab} - \beta_{cm} p_i^{lab}\right) \\ p_i^* &= \gamma_{cm} \left(p_i^{lab} - \beta_{cm} E_i^{lab}\right) \end{aligned} \tag{6.4}$$

Mas com relação ao CM $\boldsymbol{p}_a^* + \boldsymbol{p}_b^* = 0$. Portanto teremos:

$$\gamma_{cm}\left(p_a^{lab} - \beta_{cm} E_a^{lab}\right) + \gamma_{cm}\left(p_b^{lab} - \beta_{cm} E_b^{lab}\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \gamma_{cm}\boxed{\left[p_a^{lab} + p_b^{lab} - \beta_{cm}\left(E_a^{lab} + E_b^{lab}\right)\right]} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \beta_{cm} = \frac{p_a^{lab} + \cancelto{0}{p_b^{lab}}}{E_a^{lab} + E_b^{lab}} \quad \Longrightarrow \quad \beta_{cm} = \frac{p_a^{lab}}{E_a^{lab} + m_b} \qquad (6.5)$$

Definamos agora a quantidade:

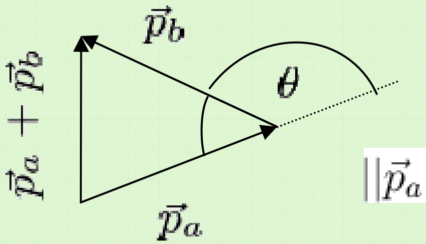
$$\sqrt{s} = \left[(P_a + P_b) \cdot (P_a + P_b)\right]^{1/2} \qquad (6.6)$$

chamada de *massa invariante* do processo. Notemos que se trata realmente de uma grandeza invariante, uma vez que depende somente do produto dos quadrimomentos, que como visto no exercício 4.1 é invariante.

Abrindo a expressão de (6.6) obtemos:

$$\sqrt{s} = \left[(E_a + E_b)^2 - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2\right]^{1/2} = \left[(m_a\gamma_a + m_b\gamma_b)^2 - ||\vec{p}_a + \vec{p}_b||^2\right]^{1/2} \tag{6.7}$$

notemos, entretanto, que o último termo diz respeito à:



$$\begin{aligned} ||\vec{p}_a + \vec{p}_b||^2 &= ||\vec{p}_a||^2 + ||\vec{p}_b||^2 + 2||\vec{p}_a|| \cdot ||\vec{p}_b|| \cos\theta \\ ||\vec{p}_a + \vec{p}_b||^2 &= (m_a\gamma_a\beta_a)^2 + (m_b\gamma_b\beta_b)^2 + 2E_aE_b\beta_a\beta_b\cos\theta \end{aligned} \tag{6.8}$$

e dessa forma (6.7) se "reduz" à:

$$\sqrt{s} = \left[(m_a\gamma_a)^2 + (m_b\gamma_b)^2 + 2E_aE_b - (m_a\gamma_a\beta_a)^2 - (m_b\gamma_b\beta_b)^2 - 2E_aE_b\beta_a\beta_b\cos\theta\right]^{1/2}$$

$$\sqrt{s} = \left[(m_a\cancel{\gamma_a})^2\underbrace{(1-\beta_a^2)}_{\cancel{\gamma_a^{-2}}} + (m_b\cancel{\gamma_b})^2\underbrace{(1-\beta_b^2)}_{\cancel{\gamma_b^{-2}}} + 2E_aE_b(1-\beta_a\beta_b\cos\theta)\right]^{1/2} \tag{6.9}$$

simplificando os termos chegamos, finalmente, à:

$$\sqrt{s} = \left[m_a^2 + m_b^2 + 2E_aE_b(1 - \beta_a\beta_b\cos\theta)\right]^{1/2} \tag{6.10}$$

Pela definição de massa invariante feita em (6.6), temos que para o LAB (com b em repouso) e para o CM:

$$\sqrt{s} = [(E_a^{lab} + m_b)^2 - (p_a^{lab})^2]^{1/2}$$
$$\sqrt{s} = E_a^* + E_b^* \tag{6.11}$$

aplicando as T.L. (6.4) aos termos à direita da expressão anterior temos:

$$\sqrt{s} = \gamma_{cm}\left(E_a^{lab} - \beta_{cm}p_a^{lab}\right) + \gamma_{cm}\left(m_b - \beta_{cm}\cdot 0\right) = \gamma_{cm}\left(E_a^{lab} + m_b - \beta_{cm}p_a^{lab}\right)$$

substituindo agora o valor de β_{cm} calculado em (6.5) obtemos:

$$\sqrt{s} = \gamma_{cm}\left(E_a^{lab} + m_b - \frac{p_a^{lab}}{E_a^{lab} + m_b}p_a^{lab}\right) \tag{6.12}$$

isolando γ_{cm} ficamos com:

$$\gamma_{cm} = \frac{\sqrt{s}\left(E_a^{lab} + m_b\right)}{(E_a^{lab} + m_b)^2 - (p_a^{lab})^2} = \frac{\sqrt{s}\left(E_a^{lab} + m_b\right)}{s}$$

$$\Longrightarrow \gamma_{cm} = \frac{E_a^{lab} + m_b}{\sqrt{s}} \tag{6.13}$$

Tendo calculado os valores de β_{cm} e γ_{cm} podemos por fim expressar as energias e momentos (das partículas a e b) no referencial do CM em função dos valores medidos no referencial do LAB.

$$E_a^* = \frac{m_a^2 + m_b E_a^{lab}}{\sqrt{s}} \qquad E_b^* = \frac{m_b(m_b + E_a^{lab})}{\sqrt{s}}$$

$$p_a^* = \frac{m_b p_a^{lab}}{\sqrt{s}} \qquad p_b^* = -\frac{m_b p_a^{lab}}{\sqrt{s}} = -p_a^* \tag{6.14}$$

Exercícios

6.1 Verifique as equações (6.14) por mera substituição das expressões (6.13) e (6.5) nas equações (6.4). (pura álgebra)

Definimos a *função cinemática* como:

$$\lambda(x, y, z) := (x - y - z)^2 - 4yz \tag{6.15}$$

Formas absolutamente equivalentes à expressão acima são:

$$\begin{aligned} \lambda(x, y, z) &= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \\ \lambda(x, y, z) &= \left(x - (\sqrt{y} + \sqrt{z})^2\right) \cdot \left(x - (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2\right) \end{aligned} \tag{6.16}$$

e para determinados valores dos parâmetros temos:

$$\lambda(x, y, y) = x(x - 4y) \qquad \lambda(x, y, 0) = (x - y)^2 \tag{6.17}$$

Exercícios

6.2 Verifique as igualdades expressas em (6.16) e (6.17). (+ álgebra)

Encontremos agora expressões para as energias e momentos das partículas a e b, no referencial do CM, em função de invariantes.
Primeiro batizamos a grandeza:

$$p^* = ||\vec{p}_a^{\,*}|| = ||\vec{p}_b^{\,*}|| \tag{6.18}$$

e sabendo que:

$$\sqrt{s} = E_a^* + E_b^* = E_a^* + (p^{*2} + m_b^2)^{1/2} \tag{6.19}$$

podemos escrever:

$$\sqrt{s} - E_a^* = (E_a^{*2} - m_a^2 + m_b^2)^{1/2} \tag{6.20}$$

elevando os dois lados ao quadrado ficamos com:

$$s - 2\sqrt{s}E_a^* + E_a^{*2} = E_a^{*2} - m_a^2 + m_b^2$$

$$\Longrightarrow \qquad E_a^* = \frac{m_a^2 - m_b^2 + s}{2\sqrt{s}} \tag{6.21}$$

Substituindo este resultado na equação (6.19) obtemos:

$$E_b^* = \sqrt{s} - E_a^* = \frac{2s - m_a^2 + m_b^2 - s}{2\sqrt{s}} \tag{6.22}$$

$$\Longrightarrow \quad E_b^* = \frac{m_b^2 - m_a^2 + s}{2\sqrt{s}} \tag{6.23}$$

Para o momento p^* as contas são um pouco mais longas. Partimos de:

$$\sqrt{s} - E_b^* = (p^{*2} + m_a^2)^{1/2} \tag{6.24}$$

elevando ambos os lados ao quadrado ficamos com:

$$s - 2\sqrt{s}E_b^* + E_b^{*2} = p^{*2} + m_a^2$$

$$\Longrightarrow \quad \cancel{s} - \cancel{2\sqrt{}}s \underbrace{\left(\frac{\cancel{s} - \cancel{m_a^2} + m_b^2}{\cancel{2\sqrt{s}}}\right)} + \underbrace{\left(\frac{s - m_a^2 + m_b^2}{2\sqrt{s}}\right)^2} = p^{*2} + \cancel{m_a^2}$$

Após as simplificações ficamos com:

$$p^{*2} = \frac{-4s \cdot m_b^2 + [(s + m_b^2) - m_a^2]^2}{4s} \tag{6.25}$$

abrindo o termo ao quadrado obtemos:

$$p^{*2} = \frac{-4s \cdot m_b^2 + \underbrace{s^2 + 2s \cdot m_b^2 + (m_b^2)^2}_{\text{quadrado do 1º}} - \underbrace{2m_a^2(s + m_b^2)}_{-2 \text{ x 1º x 2º}} + \underbrace{(m_a^2)^2}_{\text{quadrado do 2º}}}{4s}$$

$$\Rightarrow \quad p^{*2} = \frac{\overbrace{s^2 + (m_a^2)^2 + (m_b^2)^2 - 2sm_a^2 - 2sm_b^2 - 2m_a^2 m_b^2}^{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}}{4s}$$

$$\Rightarrow \quad p^* = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_a^2, m_b^2)}{2\sqrt{s}} \tag{6.26}$$

Para expressar energia e momento (no referencial do LAB) em função de invariantes, partamos da expressão (6.10) da massa invariante escrita para o LAB:

$$s = m_a^2 + m_b^2 + 2m_b E_a^{lab} \quad \Longrightarrow \quad E_a^{lab} = \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_b} \tag{6.27}$$

Já o momento, sabemos que pode ser escrito como:

$$p_a^{lab} = (E_a^{lab^2} - m_a^2)^{1/2} = \left[\frac{(s - m_a^2 - m_b^2)^2}{4m_b^2} - m_a^2\right]^{1/2}$$

$$p_a^{lab} = \left[\frac{\overbrace{(s - m_a^2 - m_b^2)^2 - 4m_a^2 m_b^2}^{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}}{4m_b^2}\right]^{1/2}$$

$$p_a^{lab} = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(s, m_a^2, m_b^2)}{2m_b} \tag{6.28}$$

3 Mecânica relativística
4 Digressão sobre formalismo
5 Aplicações da T.L.
6 Sistemas de referência

7 Decaimento de partículas

8 Espalhamento 2→2
9 Título nove
10 Título dez
11 Título onze

Consideraremos o caso de uma partícula de massa m_a e quadrimomento P_a, decaindo em duas partículas de quadrimomentos P_1 e P_2.

$$P_a = (E_a, \vec{p}_a)$$
$$P_1 = (E_1, \vec{p}_1) \quad P_2 = (E_2, \vec{p}_2) \tag{7.1}$$

No sistema fixo à partícula a (sistema do feixe e também sistema CM) os quadrimomentos são dados por:

$$P_a^* = \left(m_a, \vec{0}\right) \qquad P_1^* = (E_1^*, \vec{p}_1^{\,*}) \qquad P_2^* = (E_2^*, \vec{p}_2^{\,*}) \tag{7.2}$$

Pela conservação da energia e do momento temos, respectivamente, que:

$$m_a = E_1^* + E_2^*$$
$$\vec{p}_1^{\,*} = -\vec{p}_2^{\,*} \equiv \vec{p}^{\,*} \tag{7.3}$$

da segunda igualdade obtemos podemos encontrar a seguinte relação:

$$||\vec{p}_1^*||^2 = ||\vec{p}_2^*||^2 \implies E_1^{*2} - m_1^2 - E_2^{*2} + m_2^2 = 0$$

$$\implies E_2^{*2} = E_1^{*2} - m_1^2 + m_2^2 \qquad (7.4)$$

Substituindo agora este resultado na equação derivada da conservação da energia obtemos:

$$m_a = E_1^* + \left(E_1^{*2} - m_1^2 + m_2^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\implies m_a^2 - 2m_a E_1^* + \cancel{E_1^{*2}} = \cancel{E_1^{*2}} - m_1^2 + m_2^2$$

$$\implies E_1^* = \frac{m_a^2 + m_1^2 - m_2^*}{2m_a} \qquad (7.5)$$

Substituindo novamente este resultado na equação derivada da conservação da energia podemos encontrar a expressão para ${E_2}^*$.

$$E_2^* = m_a - E_1^* = \frac{2m_a^2 - m_a^2 - m_1^2 + m_2^2}{2m_a}$$

$$\Rightarrow \quad E_2^* = \frac{m_a^2 - m_1^2 + m_2^2}{2m_a} \tag{7.6}$$

Em seguida podemos calcular o valor de p^* através da relação:

$$p^* = p_1^* = p_2^* = \left(E_1^{*2} - m_1^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.7}$$

onde substituímos a expressão obtida para $E_1{}^*$ em (7.5), de forma a termos:

$$p^* = \left[\frac{(m_a^2 + m_1^2 - m_2^2)^2}{4m_a^2} - m_1^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \quad p^* = \left[\frac{\overbrace{(m_a^2)^2 + 2m_a^2 m_1^2 + (m_1^2)^2}^{\text{quadrado do } 1^{\text{o}}} \overbrace{- 2m_2^2(m_a^2 + m_a^2)}^{-2 \text{ x } 1^{\text{o}} \text{ x } 2^{\text{o}}} + \overbrace{(m_2^2)^2}^{\text{quadrado do } 2^{\text{o}}} - 4m_a^2 m_1^2}{4m_a^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

fazendo a distributiva e pondo os termos em evidência chegamos à:

$$p^* = \frac{[\overbrace{(m_a^2)^2 + (m_1^2)^2 + (m_2^2)^2 - 2m_a^2m_1^2 - 2m_a^2m_2^2 - 2m_1^2m_2^2}^{\lambda(m_a^2, m_1^2, m_2^2)}]^{\frac{1}{2}}}{2m_a}$$

e por fim escrevemos sinteticamente que:

$$p^* = p_1^* = p_2^* = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(m_a^2, m_1^2, m_2^2)}{2m_a} \tag{7.8}$$

Analogamente ao caso anterior, teremos agora uma partícula de massa m_a e quadrimomento P_a, decaindo em três partículas de quadrimomentos P_1, P_2, P_3.

$$P_a = (E_a, \vec{p}_a)$$
$$P_1 = (E_1, \vec{p}_1) \quad P_2 = (E_2, \vec{p}_2) \quad P_3 = (E_3, \vec{p}_3) \tag{7.9}$$

Notemos que pela conservação da energia e do momento temos também a conservação do quadrimomento:

$$\begin{matrix} E_a = E_1 + E_2 + E_3 \\ \vec{p}_a = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad P_a = P_1 + P_2 + P_3 \tag{7.10}$$

Definindo agora as seguintes grandezas:

$$P_{ij} = P_i + P_j$$
$$s_{ij} = P_{ij}^2 = (P_i + P_j) \cdot (P_i + P_j) \tag{7.11}$$

vemos que valem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned} s_{12} \equiv s_{21} &= (P_1 + P_2)^2 = (P_a - P_3)^2 \\ s_{23} \equiv s_{32} &= (P_2 + P_3)^2 = (P_a - P_1)^2 \\ s_{31} \equiv s_{13} &= (P_3 + P_1)^2 = (P_a - P_2)^2 \end{aligned} \tag{7.12}$$

ainda que fortuitamente podemos escrever o tensor simétrico s_{ij} como:

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & s_{31} \\ s_{21} & s_{22} & s_{32} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4m_1^2 & (P_1+P_2)^2 & (P_3+P_1)^2 \\ (P_1+P_2)^2 & 4m_2^2 & (P_3+P_2)^2 \\ (P_3+P_1)^2 & (P_3+P_2)^2 & 4m_3^2 \end{pmatrix} \tag{7.13}$$

Das expressões de (7.12) vemos que:

$$s_{12} + s_{23} + s_{31} = \sum_{i=1}^{3} [(E_a - E_i)^2 - ||\vec{p}_a - \vec{p}_i||^2] \tag{7.14}$$

Que equivale exatamente à:

$$s_{12} + s_{23} + s_{31} = \sum_{i=1}^{3}[(E_a^2 - 2E_aE_i + E_i^2) - (p_a^2 + p_i^2 - 2p_ap_i\cos\theta_i)] \quad (7.15)$$

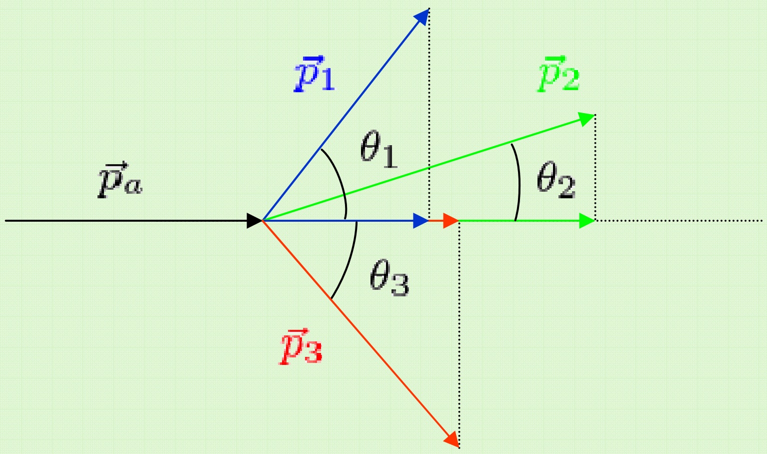
onde θ_i é o ângulo que $\boldsymbol{p_i}$ forma com $\boldsymbol{p_a}$. Arranjando os termos de (7.15) de forma mais conveniente temos:

$$s_{12} + s_{23} + s_{31} = \sum_{i=1}^{3}[\underbrace{(E_a^2 - p_a^2)}_{m_a^2} + \underbrace{(E_i^2 - p_i^2)}_{m_i^2} - 2E_aE_i + 2p_ap_i\cos\theta_i)] \quad (7.16)$$

Por fim abrindo a somatória teremos:

$$s_{12}+s_{23}+s_{31} = 3m_a^2+m_1^2+m_2^2+m_3^2-2E_a\overbrace{(E_1+E_2+E_3)}^{E_a}+2p_a\overbrace{(p_1\cos\theta_1+p_2\cos\theta_2+p_3\cos\theta_3)}^{p_a}$$

onde identificamos os termos E_a e p_a, lembrando que $p_i\cos\theta_i$ é simplesmente a projeção de $\boldsymbol{p_i}$ na direção de $\boldsymbol{p_a}$.



Como devemos ter a conservação do momento tanto na direção de $\boldsymbol{p_a}$ quanto na direção transversa, valem as igualdades:

$$p_a = p_1 \cos\theta_1 + p_2 \cos\theta_2 + p_3 \cos\theta_3$$

$$p_1 \sin\theta_1 + p_2 \sin\theta_2 + p_3 \sin\theta_3 = 0$$

Portanto a expressão anterior se reduz à:

$$s_{12} + s_{23} + s_{31} = 3m_a^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - 2(E_a^2 - p_a^2)$$

$$\Longrightarrow \quad s_{12} + s_{23} + s_{31} = m_a^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \tag{7.17}$$

No sistema do CM teremos que:

$$P_a^* = \left(m_a, \vec{0}\right) \tag{7.18}$$

dessa forma a grandeza s_{12} se escreve:

$$s_{12} = (P_a^* - P_3^*)^2 = (m_a - E_3^*)^2 - ||\overset{0}{\cancel{\vec{p}_a^*}} - \vec{p}_3^*||^2$$

$$\Longrightarrow \quad s_{12} = m_a^2 - 2m_a E_3^* + \underbrace{E_3^{*2} - p_3^{*2}}_{m_3^2} \quad \Longrightarrow \quad s_{12} = m_a^2 - 2m_a E_3^* + m_3^2$$

e isolando E_3^* na última equação obtemos:

$$E_3^* = \frac{m_a^2 + m_3^2 - s_{12}}{2m_a} \tag{7.19}$$

Utilizando um raciocínio análogo, obteríamos para E_1^* e E_2^*:

$$E_1^* = \frac{m_a^2 + m_1^2 - s_{23}}{2m_a} \qquad E_2^* = \frac{m_a^2 + m_2^2 - s_{31}}{2m_a} \tag{7.20}$$

Para calcularmos os momentos das partículas 1,2 e 3 no CM partiremos de:

$$E_i^{*2} - p_i^{*2} = m_i^2$$

$$\therefore \quad p_3^{*2} = E_3^{*2} - m_3^2 = \frac{(m_a^2 + m_3^2 - s_{12})^2 - 4m_a^2 m_3^2}{4m_a^2}$$

abrindo o quadrado da expressão acima ficamos com:

$$p_3^{*2} = \frac{\overbrace{(m_a^2)^2 + 2m_a^2 m_3^2 + (m_3^2)^2}^{\text{quadrado do 1º}} \overbrace{- 2(m_a^2 + m_3^2)s_{12}}^{-2 \text{ x } 1º \text{ x } 2º} + \overbrace{s_{12}^2}^{\text{quadrado do 2º}} - 4m_a^2 m_3^2}{4m_a^2}$$

rearranjando os termos e fazendo as simplificações chegamos à:

$$p_3^{*2} = \frac{\overbrace{(m_a^2)^2 + (m_3^2)^2 + s_{12}^2 - 2m_a^2 m_3^2 - 2m_a^2 s_{12} - 2m_3^2 s_{12}}^{\lambda(m_a^2, m_1^2, m_2^2)}}{4m_a^2}$$

onde mais uma vez identificamos a função cinemática. Por fim temos que:

$$p_3^* = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(m_a^2, m_3^2, s_{12})}{2m_a} \tag{7.21}$$

de forma análoga obteríamos para p_1^* e p_2^*:

$$p_1^* = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(m_a^2, m_1^2, s_{23})}{2m_a} \qquad p_2^* = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}(m_a^2, m_2^2, s_{31})}{2m_a} \tag{7.22}$$

<u>Exercícios</u>

7.1 Verifique os pares de equações de (7.20) e (7.22). (proceda da mesma forma utilizada para E_3^* e p_3^*)

Consideremos agora um referencial r localizado no centro de massa das partículas 2 e 3.