Introdução as Partículas Elementares

C.A.Bernardes & T.A.Costa

March 6, 2009

Quadrivetores

Posição:$(ct, \vec{x}) = (x^o, \vec{x})$

Transformam-se através das transformações de Lorentz (entre referenciais inerciais): $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$
Sendo:

$$[\Lambda^\mu_\nu] = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Onde $\beta = \frac{v}{c}$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Métrica: $[g^{\mu\nu}] = diag(1 - 1 - 1 - 1)$
Vetor Contravariante: $x^\mu = (x^o, \vec{x})$
Vetor Covariante: $x_\mu = (x^o, -\vec{x})$

Intervalo Invariante:
$I = g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} = x_{\nu}x^{\nu} = x^{\mu}x_{\mu} = (x^{o})^2 - (\vec{x}\cdot\vec{x}) := x \cdot x$

Momento: $P^{\mu} := (\frac{E}{c}; \vec{p})$ e $P_{\mu} := (\frac{E}{c}; -\vec{p})$
Temos o seguinte invariante de Lorentz: $P_{\mu}P^{\mu} = P^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}\cdot\vec{p} = m^2c^2$ onde m é a massa de repouso da partícula.

- **Sistema natural de unidades**

$c = 1 \Rightarrow [L] = [t]$
$\hbar = 1 \Rightarrow [E][t] = [\hbar] = 1 \Rightarrow [E] = [t^{-1}] = [L^{-1}]$
$E = mc^2 \Rightarrow [m] = [E] = [L^{-1}]$
alguns fatores de conversão:
$1Kg = 5,61 \times 10^{26}\,GeV$
$1m = 5,07 \times 10^{15}\,GeV^{-1}$
$1s = 1,52 \times 10^{24}\,GeV^{-1}$

Operador Quadrimomento

$$\left(\frac{\partial}{\partial t};\nabla\right)=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}:=\partial_{\mu}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t};-\nabla\right)=\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}:=\partial^{\mu}$$

$$P^{\mu}=\left(i\frac{\partial}{\partial t};-i\nabla\right)=i\partial^{\mu}(operador\quad Quadrimomento)$$

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}:=\Box(Dalambertiano)=-P^{2}$$

Mecânica Quântica

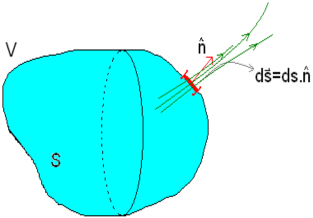
- Equação de Schrödinger para a partícula livre $\left(E = \frac{p^2}{2m}\right)$:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi$$

$$(\hbar = 1) \Rightarrow \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\nabla^2\right)\psi = 0$$

- Equação da Continuidade:

densidade de probabilidade:$\rho = |\psi|^2$



$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_v \rho d^3x = \int_s \vec{j}\cdot\vec{n}ds = \int_v \nabla\cdot\vec{j}d^3x$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0 \text{ (Equação da Continuidade)}$$

Densidade de Corrente de Probabilidade: $\vec{j} = -\frac{i}{2m}\left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right)$

- Um exemplo(uma onda plana):

$\psi(\vec{x}, t) = Ne^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}$

$\vec{j} = |N|^2 \frac{\vec{p}}{m}$ sendo $\rho = |N|^2$

- Equação de Klein-Gordon

Energia: $E^2 = p^2 + m^2$

Usando $E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \rightarrow -i\nabla$:

$$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\nabla^2\phi + m^2\phi \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi + m^2\phi = 0$$

$$\left(\Box + m^2\right)\phi = 0 \text{ (Equação de Klein-Gordon)}$$

$$\begin{cases} (-i\phi^*) \cdot \left(-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\nabla^2\phi + m^2\phi\right) & (1) \\ (-i\phi) \cdot \left(-\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2} = -\nabla^2\phi^* + m^2\phi^*\right) & (2) \end{cases}$$

Fazendo (1) – (2), temos que: $i\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right) = i\nabla\cdot(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*)$

Identificando com a equação da continuidade, temos que:

$\rho = i\left(\phi^* \frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)$ e $\vec{j} = -i\left(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*\right)$

- Exemplo(Onda Plana):

$\phi(\vec{x}, t) = Ne^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}$

$\rho = 2E|N|^2$ e $\vec{j} = 2\vec{p}|N|^2$

$j^\mu = 2|N|^2 P^\mu$(Quadricorrente)

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \textit{ (Equação da Continuidade)}$$

Temos os seguintes autovalores para a equação de Klein-Gordon:

$E = \pm(\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$

Para $E < 0$, temos $\rho < 0$.

- Em 1927, Dirac constrói uma equação linear em $\frac{\partial}{\partial t}$ e ∇.
  Idéia do "mar de Dirac" utilizando o Princípio de Exclusão de Pauli.
- Em 1934, Pauli e Weisskopf utilizando a equação de Klein-Gordon interpretavam a densidade de probabilidade como uma densidade de cargas, solucionando o problema de $\rho < 0$.

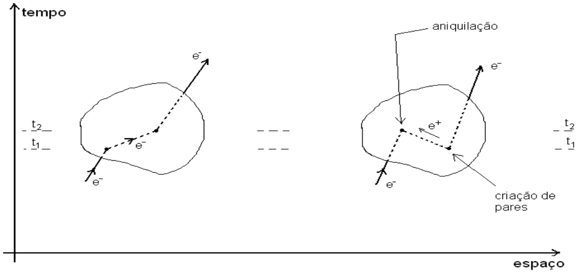
$$j^\mu = -ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$$

- *Interpretação de Feynman-Stückelberg para soluções com energia negativa.*

Soluções associadas a energias negativas representam partículas indo no sentido contrário ao da passagem do tempo que é equivalente a antipartículas indo no sentido do tempo.

$\Uparrow^{e^+}_{E>0} \equiv \Downarrow^{e^-}_{(-E)<0} \quad \uparrow$ *tempo*

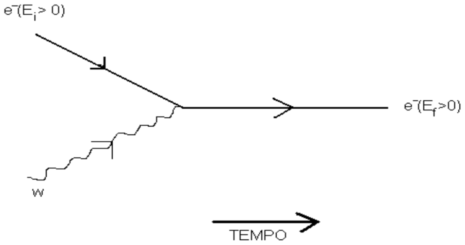
Duplo espalhamento de um elétron em um potencial:



Eletrodinâmica Escalar

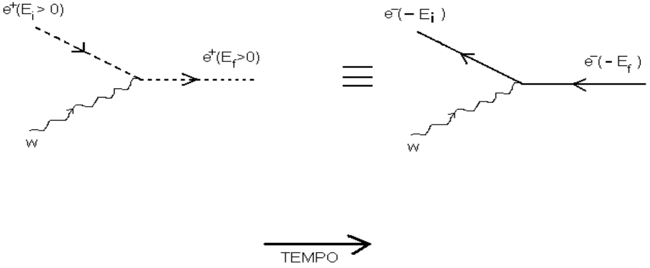
- Aprendemos a escrever a amplitude de transição para uma partícula escalar (sem spin) utilizando teoria de perturbação dependente do tempo não relativística. Agora estenderemos esses resultados para antipartículas utilizando a interpretação de Feynman-Stückelberg.
- Nas deduções usando teoria de perturbação nós trabalhamos com partículas sofrendo ações de potenciais fixos. Como é de maior interesse trabalharmos com interações entre partículas, usaremos potenciais devido a presença de outras partículas.
- A princípio trabalharemos com o potencial eletromagnético (V). Sabemos que tal potencial possui uma dependência temporal da forma e^{-iwt} sendo w a energia associada ao fóton.

Vamos primeiramente pensar em um eletrón absorvendo um fóton, isso pode ser representado da seguinte forma:



Nesse caso a amplitude de transição (T_{fi}) é proporcional a:
$\int (e^{-iE_f t})^* e^{-iwt} e^{-iE_i t} dt = 2\pi\delta(E_f - w - E_i)$

Agora vamos pensar em uma situação análoga a do elétron só que utilizando a antipartícula do elétron, o pósitron (e^+).



A amplitude de transição fica da seguinte forma:

$$\int (e^{-i(-E_i)t})^* e^{-iwt} e^{-i(-E_f)t} dt = 2\pi\delta(-E_i - w + E_f)$$

Observando os cálculos das amplitudes de transição para o espalhamento do elétron e do pósitron, nós montamos a seguinte regra (válida para as setas representando partículas):

$$\int \phi^*_{saindo} V \phi_{chegando} d^4x$$

- Agora nós vamos obter o potencial (perturbativo) eletromagnético (V), lembrando que no momento, por simplicidade, trabalharemos com partículas (leptons) sem considerar o seu spin, ou seja, usaremos a equação de *Klein-Gordon*.
- Depois utilizando o potencial eletromagnético (escrito com quadrivetores) encontraremos a amplitude de transição na forma covariante.

Nós vamos usar o exemplo do elétron, mas os resultados podem ser estendidos para outros leptons (como o μ por exemplo).

Sabemos da eletrodinâmica clássica que uma partícula de carga $(-e)$ quando imersa em um potencial eletromagnético $A^{\mu} = (A^{o}, \vec{A})$ devemos adicionar ao quadrimomento P^{μ} o termo de eA^{μ} (seria o termo representando a interação entre campo e partícula carregada),ou seja,

$$P^{\mu} \longrightarrow P^{\mu} + eA^{\mu}$$

- Como estamos trabalhando com Mecânica Quântica devemos trocar os quadrivetores pelos respectivos operadores.

$$i\partial^{\mu} \longrightarrow i\partial^{\mu} + eA^{\mu}$$

Fazendo essas mudanças e substituindo na equação de *Klein-Gordon*, temos que

$$(\partial_{\mu}\partial^{\mu} + m^2)\phi = -V\phi \text{ onde } V = -ieA_{\mu}\partial^{\mu} - ie\partial_{\mu}A^{\mu} - e^2 A_{\mu}A^{\mu}$$

No sistema natural de unidades $e^2 \approx 0.1$.
É uma boa aproximação trabalharmos com o potencial perturbativo utilizando apenas seus termos de primeira ordem.
Logo a amplitude de transição de um elétron (sem spin) sofrendo a ação de um potencial A^{μ}, ou seja, possuindo estados inicial (ϕ_i) e final (ϕ_f) é:

$$T_{fi} = -i \int \phi_f^*(x)V(x)\phi_i(x)d^4x = -e \int \phi_f^*(A^{\mu}\partial_{\mu} + \partial_{\mu}A^{\mu})\phi_i d^4x$$

Podemos escrever o segundo termo de T_{fi} da seguinte forma:

$$\int \phi_f^* \partial_\mu (A^\mu \phi_i) d^4x = A^\mu \phi_i \phi_f^* \mid_{x \to \pm\infty} - \int (\partial_\mu \phi_f^*) A^\mu \phi_i d^4x$$

O termo de superfície se anula, pois esperamos que o campo se anule para $x \to \pm\infty$.

Portanto a amplitude fica:
$T_{fi} = -e \int [\phi_f^* (\partial^\mu \phi_i) - (\partial^\mu \phi_f^*) \phi_i] A_\mu d^4x$

Mas sabemos que
$j^\mu = -ie[\phi_f^* (\partial^\mu \phi_i) - (\partial^\mu \phi_f^*) \phi_i] \Rightarrow T_{fi} = -i \int j^\mu(x) A_\mu(x) d^4x$

Para um elétron com um estado inicial (ϕ_i de energia E_i e momento $\vec{p}_i$) indo para um estado final (ϕ_f de energia E_f e momento $\vec{p}_f$), ou seja,

$$\phi_i(x) = N_i e^{-iE_i t} e^{i\vec{p}_i \cdot \vec{x}} = N_i e^{-iP_i \cdot x} \text{ e } \phi_f(x) = N_f e^{-iP_f \cdot x}$$

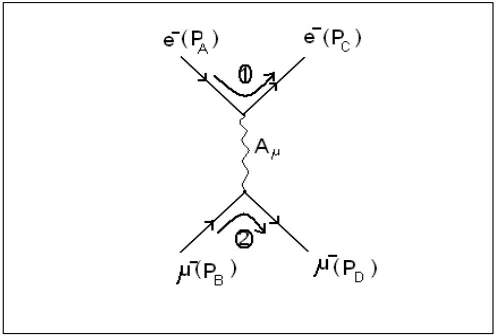
Como $\partial^\mu \phi_i = -iP_i^\mu \phi_i$ podemos escrever a corrente da seguinte forma:

$$j^\mu = -eN_i N_f (P_i^\mu + P_f^\mu) e^{i(P_f - P_i)\cdot x}$$

- Vamos fazer o exemplo do espalhamento elétron-muon ($e^- \mu \rightarrow e^- \mu$).

Para obtermos a forma do campo A^μ vamos usar a equação de ondas eletromagnéticas devido à corrente referente ao muon ($j_\mu^{(2)}$).

$$\Box A_\mu = j_\mu^{(2)}$$



De forma análoga a do elétron podemos escrever a corrente para o muon:

$$j_\mu^{(2)} = -eN_B N_D (P_B^\mu + P_D^\mu) e^{i(P_D - P_B)\cdot x}$$

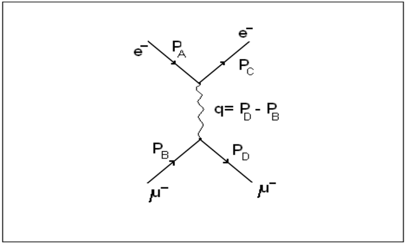
Vamos escrever $q := P_D - P_B$, sabendo que $\Box e^{iqx} = -q^2 e^{iqx}$ concluímos que o campo possui a seguinte forma:

$$A_\mu = -\frac{1}{q^2} j_\mu^{(2)}$$

Portanto podemos reescrever a amplitude como:
$T_{fi} = -i \int d^4x \left(j^\mu_{(1)} A_\mu \right) = -i \int d^4x \left(j^\mu_{(1)} \frac{-1}{q^2} j_\mu^{(2)} \right)$

Colocando as expressões das correntes, temos que
$T_{fi} = -i \int d^4x N_A N_B N_C N_D (P_A^\mu + P_C^\mu)(P_\mu^B + P_\mu^D) e^2 \left(\frac{-1}{q^2} \right) e^{i(P_C + P_D - P_A - P_B)\cdot x}$
É comum escrevermos da seguinte forma:
$T_{fi} = N_A N_B N_C N_D (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_C + P_D - P_A - P_B)(-i\mathcal{M})$
onde $-i\mathcal{M} := ie(P_A + P_C)^\mu \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) ie(P_B + P_D)^\nu$ (amplitude invariante)

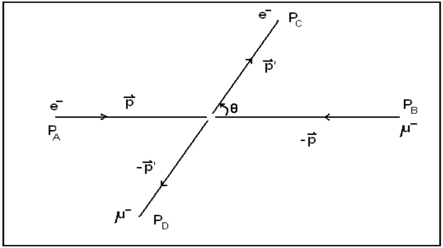
- Obtenção da seção de choque para o espalhamento elétron-muon.



Amplitude Invariante:

$$-i\mathcal{M} := ie(P_A + P_C)^{\mu} \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}\right) ie(P_B + P_D)^{\nu}$$

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4} \left[(P_A + P_C) \cdot (P_B + P_D)\right]^2$$



Aqui nós iremos considerar: $m_{e^-} = m_\mu << E_{CM}$

Pela conservação da energia:

$E_A + E_B = E_D + E_C \Rightarrow 2p = 2E_C = 2E_D = 2p'$

Lembrando que estamos no referencial do Centro de Massas(CM), com a ajuda do esquema acima, temos que:

$P_A = (p, \vec{p}) \quad P_B = (p, -\vec{p}) \quad P_C = (p, \vec{p}') \quad P_D = (p, -\vec{p}')$

Além disso, notamos que $\vec{p} \cdot \vec{p}' = p^2 cos\theta$.

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4}\left[P_A \cdot P_B + P_A \cdot P_D + P_C \cdot P_B + P_C \cdot P_D\right]^2$$

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{q^4}\left[(p^2 + \vec{p} \cdot \vec{p}) + (p^2 + \vec{p} \cdot \vec{p}') + (p^2 + \vec{p}' \cdot \vec{p}) + (p^2 + \vec{p}' \cdot \vec{p}')\right]^2 = \frac{e^4}{q^4}\left[6p^2 + 2p^2 cos\theta\right]^2$$

$$q^2 = (P_D - P_B)^2 = -2(p^2 - p^2 cos\theta)$$

$$|\mathcal{M}|^2 = e^4 \frac{4p^4(3+cos\theta)^2}{4p^4(1-cos\theta)^2}$$

Com isso obtemos finalmente a seção de choque:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{CM} = \frac{1}{64\pi^2 E_{CM}^2}\frac{p_f}{p_i}|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{64\pi^2 E_{CM}^2}\left(\frac{3+cos\theta}{1-cos\theta}\right)^2$$