Introdução as Partículas Elementares

C.A.Bernardes & T.A.Costa

February 19, 2009

Quadrivetores

Posição:$(ct, \vec{x}) = (x^o, \vec{x})$

Transformam-se através das transformações de Lorentz (entre referenciais inerciais): $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}$
Sendo:

$$[\Lambda^{\mu}_{\nu}] = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Onde $\beta = \frac{v}{c}$ e $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Métrica: $[g^{\mu\nu}] = diag(1 - 1 - 1 - 1)$
Vetor Contravariante: $x^{\mu} = (x^o, \vec{x})$
Vetor Covariante: $x_{\mu} = (x^o, -\vec{x})$

Intervalo Invariante:
$I = g_{\mu\nu}x^{\mu}x^{\nu} = x_{\nu}x^{\nu} = x^{\mu}x_{\mu} = (x^{o})^2 - (\vec{x}\cdot\vec{x}) := x \cdot x$

Momento: $P^{\mu} := (\frac{E}{c}; \vec{p})$ e $P_{\mu} := (\frac{E}{c}; -\vec{p})$
Temos o seguinte invariante de Lorentz: $P_{\mu}P^{\mu} = P^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}\cdot\vec{p} = m^2c^2$ onde m é a massa de repouso da partícula.

- **Sistema natural de unidades**

$c = 1 \Rightarrow [L] = [t]$
$\hbar = 1 \Rightarrow [E][t] = [\hbar] = 1 \Rightarrow [E] = [t^{-1}] = [L^{-1}]$
$E = mc^2 \Rightarrow [m] = [E] = [L^{-1}]$
alguns fatores de conversão:
$1Kg = 5,61 \times 10^{26} GeV$
$1m = 5,07 \times 10^{15} GeV^{-1}$
$1s = 1,52 \times 10^{24} GeV^{-1}$

Operador Quadrimomento

$\left(\frac{\partial}{\partial t};\nabla\right)=\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}:=\partial_{\mu}$

$\left(\frac{\partial}{\partial t};-\nabla\right)=\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}:=\partial^{\mu}$

$P^{\mu}=\left(i\frac{\partial}{\partial t};-i\nabla\right)=i\partial^{\mu}(operador\quad Quadrimomento)$

$\partial_{\mu}\partial^{\mu}:=\Box(Dalambertiano)=-P^{2}$

Mecânica Quântica

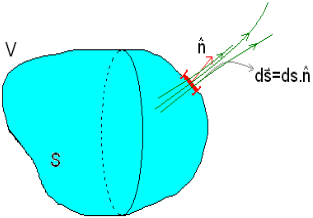
- Equação de Schrödinger para a partícula livre $\left(E = \frac{p^2}{2m}\right)$:

$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi$

$(\hbar = 1) \Rightarrow \left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2m}\nabla^2\right)\psi = 0$

- Equação da Continuidade:

densidade de probabilidade:$\rho = |\psi|^2$



$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_v \rho d^3x = \int_s \vec{j}\cdot\vec{n}ds = \int_v \nabla\cdot\vec{j}d^3x$$

$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\vec{j} = 0$ (Equação da Continuidade)

Densidade de Corrente de Probabilidade: $\vec{j} = -\frac{i}{2m}\left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right)$

- Um exemplo(uma onda plana):

$\psi(\vec{x}, t) = Ne^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}$

$\vec{j} = |N|^2 \frac{\vec{p}}{m}$ sendo $\rho = |N|^2$

- Equação de Klein-Gordon

Energia: $E^2 = p^2 + m^2$

Usando $E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$ e $\vec{p} \rightarrow -i\nabla$:

$-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\nabla^2\phi + m^2\phi \Rightarrow \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\phi + m^2\phi = 0$

$$\left(\Box + m^2\right)\phi = 0 \text{ (Equação de Klein-Gordon)}$$

$$\begin{cases} (-i\phi^*)\cdot\left(-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\nabla^2\phi + m^2\phi\right) & (1) \\ (-i\phi)\cdot\left(-\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2} = -\nabla^2\phi^* + m^2\phi^*\right) & (2) \end{cases}$$

Fazendo $(1)-(2)$, temos que: $i\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right) = i\nabla\cdot(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*)$

Identificando com a equação da continuidade, temos que:

$\rho = i\left(\phi^* \frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right)$ e $\vec{j} = -i\left(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*\right)$

- Exemplo(Onda Plana):

$\phi(\vec{x}, t) = Ne^{i(\vec{p}\cdot\vec{x} - Et)}$

$\rho = 2E|N|^2$ e $\vec{j} = 2\vec{p}|N|^2$

$j^\mu = 2|N|^2 P^\mu$(Quadricorrente)

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \textit{ (Equação da Continuidade)}$$

Temos os seguintes autovalores para a equação de Klein-Gordon:

$E = \pm(\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$

Para $E < 0$, temos $\rho < 0$.

- Em 1927, Dirac constrói uma equação linear em $\frac{\partial}{\partial t}$ e ∇. Idéia do "mar de Dirac" utilizando o Princípio de Exclusão de Pauli.
- Em 1934, Pauli e Weisskopf utilizando a equação de Klein-Gordon interpretavam a densidade de probabilidade como uma densidade de cargas, solucionando o problema de $\rho < 0$.

$$j^\mu = -ie(\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*)$$

- *Interpretação de Feynman-Stückelberg para soluções com energia negativa.*

Soluções associadas a energias negativas representam partículas indo no sentido contrário ao da passagem do tempo que é equivalente a antipartículas indo no sentido do tempo.

$\Uparrow^{e^+}_{E>0} \equiv \Downarrow^{e^-}_{(-E)<0} \quad \uparrow tempo$

Duplo espalhamento de um elétron em um potencial: