Cinemática Relativística

Sérgio F. Novaes

Índice

Capítulo 1

Cinemática Relativística

1.1 Relatividade Restrita

1.1.1 Transformação de Lorentz

Consideremos um sistema de referência inercial S' onde um ponto do espaço-tempo é descrito pelas coordenadas (t', x', y', z') se movendo com velocidade constante $\vec{\beta}_s = \vec{V}_s/c$ em relação à um sistema S onde o mesmo ponto do espaço-tempo possui coordenadas (t, x, y, z). Escolhendo $z \parallel z' \parallel \vec{\beta}_s$ e assumindo que a origem de ambos os sistemas de coordenadas coincidiam em $t = t' = 0$ a transformação de Lorentz e sua inversa são dadas por:

$$\begin{aligned} t = \gamma_s(t' + \beta_s z')\ ,\ \ x = x'\ ,\ \ y = y'\ ,\ \ z = \gamma_s(z' + \beta_s t') \\ t' = \gamma_s(t - \beta_s z)\ ,\ \ x' = x\ ,\ \ y' = y\ ,\ \ z' = \gamma_s(z - \beta_s t) \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde tomamos $c = 1$ e definimos o fator de Lorentz como:

$$\gamma_s = (1 - \beta_s^2)^{-1/2}$$

As equações da Relatividade Restrita e, em particular, da Física de Partículas ficam bastante simplificadas se considerarmos o conceito de quadrivetores. Para as coordenadas do espaço-tempo, escrevemos

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \vec{x}) = (t, x, y, z) \tag{1.2}$$

Qualquer quadrivetor A^μ se transforma sob Lorentz como x^μ, ou seja, sob a transformação Eq.(1.1), temos:

$$A^0 = \gamma_s(A'^0 + \beta_s A'^3)\ , \quad A^1 = A'^1\ , \quad A^2 = A'^2\ , \quad A^3 = \gamma_s(A'^3 + \beta_s A'^0)$$

Introduzindo o tensor métrico:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

temos:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$$

Onde A^μ são chamadas de componentes *contravariantes* e A_μ *covariantes*, com:

$$A_0 = A^0\ , \quad A_1 = -A^1\ , \quad A_2 = -A^2\ , \quad A_3 = -A^3\ ,$$

em particular,

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, -\vec{x}) = (t, -x, -y, -z)$$

Definimos também o tensor unitário δ^μ_ν, tal que $\delta^\mu_\nu A^\nu = A^\mu$, com $\delta^\mu_\mu = 4$. Além destes dois tensores (*i.e.* $g^{\mu\nu}$ e δ^μ_ν), o tensor totalmente antissimétrico $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ ($\epsilon^{0123} = +1$) também possui as mesmas componentes em qualquer sistema de referência.[1]

[1] Na realidade, $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é um pseudo-tensor uma vez que sob rotações ele se comporta como um tensor mas a mudança de sinal de uma ou três coordenadas **não** acarreta na

Podemos escrever o produto escalar entre dois quadrivetores como:

$$
\begin{aligned}
A \cdot B &\equiv \sum_{\mu=0}^{3} A^\mu B_\mu = g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \\
&= A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 = A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 \\
&= A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B} \qquad (1.4)
\end{aligned}
$$

Podemos também definir o *quadrimomento* de uma partícula como:

$$
p^\mu = (E, \vec{p}) \qquad (1.5)
$$

onde,

$$
\begin{aligned}
E &= m\gamma \\
\vec{p} &= m\gamma\vec{\beta} \qquad (1.6)
\end{aligned}
$$

onde m é a massa da partícula com velocidade β:

$$
\vec{\beta} = \vec{p}/E \ , \quad \text{e} \ \ \gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = E/m
$$

O quadrado do quadrimomento de uma partícula satisfaz:

$$
p^2 = p^\mu p_\mu = E^2 - |\vec{p}|^2 = m^2
$$

Vamos escrever o momento de uma partícula em coordenadas esfericas:

$$
\vec{p} = (p_x, p_y, p_z) = |\vec{p}| \ (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)
$$

---

mudança de sinal de suas coordenadas. Sob reflexão do sistema de coordenadas, *i.e.* sob a mudança de sinal de todas as coordenadas: um escalar e um pseudo-vetor ou vetor axial (*e.g.* $\vec{A} \times \vec{B}$) **não mudam** de sinal, enquanto, um pseudo-escalar (*e.g.* $\vec{A} \times \vec{B} \cdot \vec{C}$) e um vetor **mudam**. Ele possui ainda as seguintes propriedades:

$$
\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} = -2(\delta^\mu_\rho\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\rho) \ , \ \ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\rho\nu\alpha\beta} = -6\delta^\mu_\rho \ \ \text{e} \ \ \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = -24
$$

e, como iremos tratar na maioria dos casos transformações ao longo do eixo z, vamos definir o *momento longitudinal* e *transversal* como:

$$\begin{aligned} p_{\parallel} &= p_z = |\vec{p}| \cos\theta \\ p_{\perp} &= (p_x^2 + p_y^2)^{1/2} = |\vec{p}| \sin\theta \end{aligned} \tag{1.7}$$

Desta forma, a energia e o momento $(E', \vec{p}\,')$ de uma partícula vistos de um sistema que se move com velocidade $\vec{\beta}_s$ na direção z são dados por:

$$\begin{pmatrix} E' \\ p'_{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_s & -\gamma_s\beta_s \\ -\gamma_s\beta_s & \gamma_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_{\parallel} \end{pmatrix} \quad , \quad p'_{\perp} = p_{\perp} \tag{1.8}$$

onde $p_{\perp}$ ($p_{\parallel}$) são as componentes de $\vec{p}$ perpendicular (paralela) à $\vec{\beta}_s$. Esta última expressão é apenas uma maneira mais conveniente de se escrever a Eq.(1.1).

Exercício 1.1:
Mostre que o produto escalar de quaisquer dois quadrivetores $p_1 \cdot p_2 = E_1 E_2 - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2$ *é invariante sob transformações de Lorentz, ou seja, independente de sistema de referência.*

A transformação de ângulos sob transformações de Lorentz pode ser facilmente extraida da Eq.(1.8). Para o caso do ângulo azimutal ϕ, temos:

$$\tan\phi' = \frac{p'_y}{p'_x} = \frac{p_y}{p_x} = \tan\phi$$

ou seja, o ângulo azimutal ao redor de um eixo é invariante sob transformações de Lorentz ao longo deste eixo.

Para o ângulo polar, ou seja, o ângulo que o momento da partícula faz com o eixo do "boost" visto do sistema S' é:

$$\tan\theta' = \frac{p'_{\perp}}{p'_{\parallel}} = \frac{p_{\perp}}{p'_{\parallel}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{p_\perp}{\gamma_s(p_\parallel - \beta_s E)} = \frac{1}{\gamma_s}\frac{p_\perp/|\vec{p}|}{(p_\parallel/|\vec{p}| - \beta_s E/|\vec{p}|)} \\
&= \frac{1}{\gamma_s}\frac{\sin\theta}{(\cos\theta - \beta_s/\beta)} \qquad (1.9)
\end{aligned}
$$

ou, equivalentemente:

$$
\tan\theta = \frac{1}{\gamma_s}\frac{\sin\theta'}{(\cos\theta' + \beta_s/\beta')}
$$

Para introduzirmos o conceito de *rapidez* vamos escrever a transformação Eq.(1.8) como:

$$
\begin{pmatrix} E' \\ p'_\parallel \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh y & -\sinh y \\ -\sinh y & \cosh y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ p_\parallel \end{pmatrix} \;, \quad p'_\perp = p_\perp \qquad (1.10)
$$

onde definimos o parametro y chamado de rapidez através de:

$$
\beta_s = \tanh y \;, \quad \gamma_s = \cosh y \;, \quad \gamma_s\beta_s = \sinh y \qquad (1.11)
$$

ou, inversamente[2]:

$$
\begin{aligned}
y &= \cosh^{-1}(\gamma) = \ln(\gamma + \gamma\beta_s) \\
&= \tanh^{-1}(\beta_s) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\beta_s}{1-\beta_s}\right) \qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

Supondo a partícula parada em s', temos $\beta = \beta_s$ e, como:

$$
E \pm p_\parallel = m\gamma(1 \pm \beta)
$$

podemos escrever a rapidez de uma partícula como:

$$
y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{E+p_\parallel}{E-p_\parallel}\right)
$$

[2]Lembre que:

$$
\sinh^{-1}(z) = \ln(z+\sqrt{z^2+1}) \;, \;\; \cosh^{-1}(z) = \ln(z+\sqrt{z^2-1}) \;, \text{ e } \tanh^{-1}(z) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right)
$$

Enquanto a velocidade varia no intervalo $-1 \leq \beta \leq 1$, a rapidez varia $-\infty \leq y \leq \infty$.

Quando executamos duas transformações de Lorentz paralelas consecutivas de parâmetros β_1 e β_2 o resultado combinado é expresso pelos parâmetros:

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1\beta_2} \\ \gamma_3 &= \gamma_1\gamma_2(1 + \beta_1\beta_2) \end{aligned} \tag{1.13}$$

Exercício 1.2:
Mostre as relações (1.13)

Desta forma, em termos da rapidez, temos:

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \tanh y_3 = \frac{\tanh y_1 + \tanh y_2}{1 + \tanh y_1 \tanh y_2} \\ &\equiv \tanh(y_1 + y_2) \end{aligned} \tag{1.14}$$

ou seja, a rapidez é aditiva sob transformações de Lorentz paralelas *i.e.* : $y_3 = y_1 + y_2$

1.1.2 Sistemas de Referência

Consideremos a colisão de duas partículas de quadrimomento $(E_a, \vec{p}_a)$ e $(E_b, \vec{p}_b)$. Na descrição destas colisões, dois sistemas de referência são usualmente utilizados:

(i) *Sistema de Centro de Massa (CM)*: É definido como o sistema onde

$$\vec{p}_a = \vec{p}_b$$

e, as quantidade referentes a este sistema serão denotadas a partir de agora por um asterisco $(*)$.

(ii) *Sistema de Laboratório (LAB)*: É o sistema no qual são feitas as medidas. No caso de experimento de alvo fixo este sistema coincide com o sistema do alvo, onde uma das partículas (*e.g.* b) encontra-se em repouso *i.e.* $\vec{p}_b = 0$. Nos experimentos de anéis de colisão, onde feixes de partículas idênticas colidem em direções opostas, este sistema coincide com o CM.

Escolhendo o eixo z como a direção de movimento, os momentos das partículas a e b podem ser escritos, no sistema de CM como:

$$\begin{aligned} p_a^* &= (E_a^*, 0, 0, p_a^*) \\ p_b^* &= (E_b^*, 0, 0, -p_a^*) \end{aligned} \tag{1.15}$$

e, no sistema LAB (alvo fixo, b em repouso) como:

$$\begin{aligned} p_a^{lab} &= (E_a^{lab}, 0, 0, p_a^{lab}) \\ p_b^{lab} &= (m_b, 0, 0, 0) \end{aligned} \tag{1.16}$$

A transformação de Lorentz entre os dois sistemas será dada por:

$$\begin{aligned} E_i^* &= \gamma_{cm}(E_i^{lab} - \beta_{cm} p_i^{lab}) \\ p_i^* &= \gamma_{cm}(p_i^{lab} - \beta_{cm} E_i^{lab}) \end{aligned} \tag{1.17}$$

onde $i = a$, b e β_{cm} é a velocidade do CM no LAB. Como $\vec{p}_a^* + \vec{p}_b^* = 0$ da Eq.(1.17) temos:

$$\gamma_{cm}[(p_a^{lab} + p_b^{lab}) - \beta_{cm}(E_a^{lab} + E_b^{lab})] = 0$$

e portanto β_{cm} é dada por:

$$\beta_{cm} = \frac{|\vec{p}_a + \vec{p}_b|}{E_a^{lab} + E_b^{lab}}(\vec{p}_b = 0) = \frac{p_a^{lab}}{E_a^{lab} + m_b}$$

No caso de uma colisão de duas partículas de massa m_a e m_b a energia total da colisão ou *massa invariante* é dada por:

$$\begin{aligned} E_T &= (p_a + p_b)^{1/2} = \left[(E_a + E_b)^2 - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2\right]^{1/2} \\ &= \left[m_a^2 + m_b^2 + 2E_a E_b(1 - \beta_a \beta_b \cos\theta)\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{1.18}$$

onde θ é o ângulo entre as duas partículas. Podemos ver que na definição de E_T aparecem apenas produtos escalares de quadrimomentos o que faz de E_T uma quantidade independente de sistema de referência. Em termos das variáveis de CM e LAB onde a partícula b está em repouso temos:

$$
\begin{aligned}
E_T &= (E_a^* + E_b^*) \\
&= \left[(E_a^{lab} + m_b)^2 - (\vec{p}_a^{lab})^2\right]^{1/2} = \left(m_a^2 + m_b^2 + 2m_b E_a^{lab}\right)^{1/2} \qquad (1.19)
\end{aligned}
$$

Exercício 1.3:
Mostre que $\gamma_{cm} = (E_a^{lab} + m_b)/E_T$

A quantidade E_T pode ser considerada como a energia útil de um acelerador. Para termos idéia de algumas ordens de magnitude consideremos protons ($m_p \simeq 1$ GeV) colidindo a uma energia de 1 TeV com outro proton em repouso. Neste caso:

$$
E_T \simeq \sqrt{2m_p E_p^{lab}} = \sqrt{2000}\text{GeV} \simeq 45\text{GeV}
$$

Por outro lado se considerarmos dois protons em um anél de colisão colidindo com 1 TeV, a energia total será:

$$
E_T = E_{pa}^* + E_{pb}^* = 2E_p = 2000\text{GeV}
$$

Da Eq.(1.17) podemos escrever as variáveis de CM em termos das do LAB:

$$
\begin{aligned}
E_a^* &= \frac{m_a^2 + m_b E_a^{lab}}{E_T} \\
E_b^* &= \frac{m_b(m_b + E_a^{lab})}{E_T} \\
p_a^* &= \frac{m_b p_a^{lab}}{E_T} \\
p_b^* &= \frac{-m_b p_a^{lab}}{E_T} = -p_a^* \qquad (1.20)
\end{aligned}
$$

Exercício 1.4:
Confira as Eq.(1.20)

Apresentamos na Tabela (1.1) os valores da energia total (E_T) e do momento (p_a^*) no CM para a colisão de feixes de eletron ($m_a = m_e \simeq 0$) e proton ($m_a = m_p \simeq 0.938$ GeV) colidindo com um proton fixo em função do momento do feixe (p_a^{lab}).

Tabela 1.1: Energia e Momento CM versus Momento do Feixe de Protons

p_a^{lab} (GeV)	E_T	(GeV)	p_a^*	(GeV)
	ep	pp	ep	pp
1	1.66	2.08	0.57	0.45
10	4.43	4.54	2.12	2.07
100	13.73	13.76	6.83	6.82
500	30.65	30.66	15.3	15.3
1000	43.33	43.34	21.7	21.6
10000	137.0	137.0	68.5	68.5

Podemos escrever de maneira compacta as variáveis não invariantes ($E_{a,b}$ e $p_{a,b}$) em termos das invariantes (E_T e $m_{a,b}$) nos diferentes sistemas de referência. A quantidade E_T^2 é usualmente designada pela variável de Mandelstam s, que será introduzida posteriormente. Passaremos portanto a utilizar esta notação para o quadrado da massa invariante.

Vamos definir a função cinemática:

$$\begin{aligned}
\lambda(x,y,z) &= (x-y-z)^2 - 4yz \\
&= x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz - 2zx \\
&= \left[x - (\sqrt{y}+\sqrt{z})^2\right]\left[x - (\sqrt{y}-\sqrt{z})^2\right] \qquad (1.21)
\end{aligned}$$

que, para alguns valores especiais fica:

$$\lambda(x,y,y) = x(x-4y)$$

$$\lambda(x, y, 0) = (x-y)^2 \tag{1.22}$$

Utilizando a definição de $\lambda(x, y, z)$ podemos reescrever Eq.(1.20). Como $\vec{p}_a^* + \vec{p}_b^* = 0$ escrevemos:

$$|\vec{p}_a^*| = |\vec{p}_b^*| = p^*$$

e, conforme Eq.(1.19)

$$\sqrt{s} = E_a^* + E_b^*$$

ou seja:

$$\sqrt{s} = [p^{*2} + m_a^2]^{1/2} + [p^{*2} + m_b^2]^{1/2} = E_a^* + [E_a^{*2} - m_a^2 + m_b^2]^{1/2}$$

Obtemos portanto:

$$\begin{aligned}
E_a^* &= \frac{s + m_a^2 - m_b^2}{2\sqrt{s}} \\
E_b^* &= \sqrt{s} - E_a^* = \frac{s - m_a^2 + m_b^2}{2\sqrt{s}} \\
p^* &= \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{2\sqrt{s}}
\end{aligned} \tag{1.23}$$

E, utilizando a Eq.(1.19), temos:

$$\begin{aligned}
E_a^{lab} &= \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_b} \\
p_a^{lab} &= [(E_a^{lab})^2 - m_a^2]^{1/2} = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{2m_b}
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Exercício 1.5:

Obtenha as Eq.(1.23) e Eq.(1.24)

1.2 Decaimento

1.2.1 Decaimento de Dois Corpos

Consideremos uma partícula de massa M e quadrimomento P decaindo em duas outras de quadrimomentos:

$$p_i = (E_i, \vec{p}_i) \ , \qquad i = 1, 2$$

No sistema de repouso da partícula de massa M, os quadrimomentos se escrevem com:

$$\begin{aligned} P^* &= (M, 0, 0, 0) \\ p_1^* &= (E_1^*, \vec{p}^*) \\ p_2^* &= (E_2^*, -\vec{p}^*) \end{aligned} \tag{1.25}$$

onde $M = E_1^* + E_2^*$ e $\vec{p}_1^* = -\vec{p}_2^* = \vec{p}^*$. Desta forma:

$$\begin{aligned} P^{*\,2} &= M^2 = (p_1^* + p_2^*)^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1^* E_2^* + |\vec{p}^*|^2) \\ &= m_1^2 + m_2^2 + 2[E_1^*(M - E_1^*) + (E_1^{*\,2} - m_1^2)] \end{aligned} \tag{1.26}$$

E podemos escrever as energias e momentos finais como:

$$\begin{aligned} E_1^* &= \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} \\ E_2^* &= M - E_1^* = \frac{M^2 - m_1^2 + m_2^2}{2M} \\ |\vec{p}_1^*| = |\vec{p}_2^*| &= (E_1^{*\,2} - m_1^2)^{1/2} \\ &= \frac{\left[(M^2 - (m_1 + m_2)^2)\,(M^2 - (m_1 - m_2)^2)\right]^{1/2}}{2M} \\ &= \frac{\lambda^{1/2}(M^2, m_1^2, m_2^2)}{2M} \end{aligned} \tag{1.27}$$

1.2.2 Decaimento de Três Corpos

Consideremos uma partícula de massa M e quadrimomento P decaindo agora em três outras de massas m_i e quadrimomentos $p_i; i = 1, 2, 3$. Vamos primeiramente definir:

$$p_{ij} = p_i + p_j \ , \quad s_{ij} = p_{ij}^2$$

ou seja:

$$\begin{aligned} s_{12} &= (p_1 + p_2)^2 = (P - p_3)^2 \\ s_{23} &= (p_2 + p_3)^2 = (P - p_1)^2 \\ s_{31} &= (p_3 + p_1)^2 = (P - p_2)^2 \end{aligned} \tag{1.28}$$

desta forma, temos:

$$s_{12} + s_{23} + s_{31} = M^2 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$$

Exercício 1.6:
Mostre a relação acima.

No sistema de repouso da partícula que decai temos $\vec{P}^* = \vec{p}_1^* + \vec{p}_2^* + \vec{p}_3^* = 0$ e podemos obter as energias e momentos em termos de s_{ij} substituindo $P = (M, 0, 0, 0)$ em Eq.(1.28). Por exemplo:

$$s_{12} = (P^* - p_3^*)^2 = M^2 + m_3^2 - 2ME_3^* \ ,$$

de onde obtemos E_3^* e consequentemente p_3^*. Da mesma forma obtemos as demais energias e momentos:

$$\begin{aligned} E_1^* &= \frac{M^2 + m_1^2 - s_{23}}{2M} \\ E_2^* &= \frac{M^2 + m_2^2 - s_{31}}{2M} \\ E_3^* &= \frac{M^2 + m_3^2 - s_{12}}{2M} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_1^* &= \frac{\lambda^{1/2}(M^2, m_1^2, s_{23})}{2M} \\
p_2^* &= \frac{\lambda^{1/2}(M^2, m_2^2, s_{31})}{2M} \\
p_3^* &= \frac{\lambda^{1/2}(M^2, m_3^2, s_{12})}{2M}
\end{aligned} \tag{1.29}
$$

Em geral é mais conveniente considerar um sistema no qual duas das três partículas finais estão em repouso. Consideremos por exemplo o referencial (r) no qual as partículas 2 e 3 encontram-se em repouso *i.e.* $p_2^r + p_3^r = (\sqrt{s_{23}}, 0, 0, 0) = P^r - p_1^r$. Conseguimos as energias e momentos neste referencial substituindo esta relação na Eq.(1.28), *e.g.* :

$$
\begin{aligned}
s_{23} &= (P^r - p_1^r)^2 = [(\sqrt{s_{23}} + E_1^r, \vec{p}_1^r) - (E_1^r, \vec{p}_1^r)]^2 \\
&= M^2 + m_1^2 - 2\left[(\sqrt{s_{23}} + E_1^r)E_1^r - (E_1^{r\,2} - m_1^2)\right] \\
&= M^2 - m_1^2 - 2\sqrt{s_{23}}E_1^r
\end{aligned} \tag{1.30}
$$

Assim, as energias e momentos neste referencial são dados por:

$$
\begin{aligned}
E^r &= \frac{M^2 + s_{23} - m_1^2}{2\sqrt{s_{23}}} \\
E_1^r &= \frac{M^2 - s_{23} - m_1^2}{2\sqrt{s_{23}}} \\
E_2^r &= \frac{s_{23} + m_2^2 - m_3^2}{2\sqrt{s_{23}}} \\
E_3^r &= \frac{s_{23} - m_2^2 + m_3^2}{2\sqrt{s_{23}}} \\
P^r = p_1^r &= \frac{\lambda^{1/2}(M^2, s_{23}, m_1^2)}{2\sqrt{s_{23}}} \\
p_2^r = p_3^r &= \frac{\lambda^{1/2}(s_{23}, m_2^2, m_3^2)}{2\sqrt{s_{23}}}
\end{aligned} \tag{1.31}
$$

1.3 Espalhamento 2 → 2

Vamos definir as chamadas *Variáveis de Mandelstam* para o processo $p_a + p_b \to p_1 + p_2$:

$$\begin{aligned}
s &= (p_a + p_b)^2 = (p_1 + p_2)^2 \\
&= (E_a^* + E_b^*)^2 = (E_1^* + E_2^*)^2 \\
&= m_a^2 + m_b^2 + 2m_b E_a^{lab} \\
t &= (p_a - p_1)^2 = (p_b - p_2)^2 \\
&= m_a^2 + m_1^2 - 2E_a E_1 + 2p_a p_1 \cos\theta_{a1} \ , \quad \text{CM ou LAB} \\
&= m_b^2 + m_2^2 - 2m_b E_2^{lab} \\
u &= (p_a - p_2)^2 = (p_b - p_1)^2 \\
&= m_a^2 + m_2^2 - 2E_a E_2 + 2p_a p_2 \cos\theta_{a2} \ , \quad \text{CM ou LAB} \\
&= m_b^2 + m_1^2 - 2m_b E_1^{lab}
\end{aligned} \tag{1.32}$$

satisfazem,

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \tag{1.33}$$

Exercício 1.7:
Mostre a relação (1.33)

A energia e momento das partículas no CM em termos das variáveis de Mandelstam são:

$$\begin{aligned}
E_a^* &= \frac{s + m_a^2 - m_b^2}{2\sqrt{s}} \\
E_b^* &= \frac{s + m_b^2 - m_a^2}{2\sqrt{s}} \\
E_1^* &= \frac{s + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{s}} \\
E_2^* &= \frac{s + m_2^2 - m_1^2}{2\sqrt{s}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_a^* = p_b^* &= \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{2\sqrt{s}} \\
p_1^* = p_2^* &= \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{2\sqrt{s}} \qquad (1.34)
\end{aligned}
$$

Introduzindo estes resultados na relação entre t e $\cos\theta_{a1}^*$, Eq.(1.32), temos:

$$
\begin{aligned}
\cos\theta_{a1}^* &= \frac{t - m_a^2 - m_1^2 + 2E_a^* E_1^*}{2p_a^* p_b^*} \\
&= \frac{2s(t - m_a^2 - m_1^2) + (s + m_a^2 - m_b^2)(s + m_1^2 - m_2^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)} \qquad (1.35)
\end{aligned}
$$

a relação para θ_{a2}^* pode ser obtida lembrando que $\theta_{a2}^* = \pi - \theta_{a1}^*$

Agora, a energia e momento das partículas no LAB, em termos das variáveis de Mandelstam se escrevem:

$$
\begin{aligned}
E_a^{lab} &= \frac{s - m_a^2 - m_b^2}{2m_b} \\
E_b^{lab} &= m_b \\
E_1^{lab} &= \frac{-u + m_b^2 + m_1^2}{2m_b} \\
E_2^{lab} &= \frac{-t + m_b^2 + m_2^2}{2m_b} \\
p_a^{lab} &= \frac{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)}{2m_b} \\
p_b^{lab} &= 0 \\
p_1^{lab} &= \frac{\lambda^{1/2}(u, m_b^2, m_1^2)}{2m_b} \\
p_2^{lab} &= \frac{\lambda^{1/2}(t, m_b^2, m_2^2)}{2m_b} \qquad (1.36)
\end{aligned}
$$

E, as relações para os ângulos são:

$$
\begin{aligned}
\cos\theta_{a1}^{lab} &= \frac{2m_b^2(t - m_a^2 - m_1^2) + (s - m_a^2 - m_b^2)(-u + m_1^2 + m_b^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)\lambda^{1/2}(u, m_b^2, m_1^2)} \\
\cos\theta_{a2}^{lab} &= \frac{2m_b^2(u - m_a^2 - m_2^2) + (s - m_a^2 - m_b^2)(-t + m_2^2 + m_b^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)\lambda^{1/2}(t, m_b^2, m_2^2)} \qquad (1.37)
\end{aligned}
$$

Exercício 1.8:
Verifique as Eq.(1.34), Eq.(1.35), Eq.(1.36) e Eq.(1.37)

1.3.1 Região Física em s, t e u

Vamos determinar a região fisicamente aceitável no plano st para a reação $a + b \to 1 + 2$. Vamos assumir que $m_a = m_1 = m$ e $m_b = m_2 = M$. As energias e momentos são dados por:

$$\begin{aligned} E_a^* &= E_1^* = \frac{s + m^2 - M^2}{2\sqrt{s}} \\ E_b^* &= E_2^* = \frac{s + M^2 - m^2}{2\sqrt{s}} \\ p_a^* &= p_b^* = p_1^* = p_2^* \equiv p^* = \frac{\lambda^{1/2}(s, M^2, m^2)}{2\sqrt{s}} \end{aligned} \tag{1.38}$$

O ângulo θ_{a1}^* é obtido da Eq.(1.35):

$$\cos\theta_{a1}^* = 1 + \frac{2st}{\lambda(s, M^2, m^2)} \tag{1.39}$$

e, a variável t:

$$\begin{aligned} t &= -\frac{\lambda(s, M^2, m^2)}{2s}(1 - \cos\theta_{a1}^*) \\ &= -2(p^*)^2(1 - \cos\theta_{a1}^*) \\ &= -4(p^*)^2 \sin(\theta_{a1}^*/2) \end{aligned} \tag{1.40}$$

Podemos obter a relação para u usando:

$$s + t + u = 2M^2 + 2m^2$$

obtendo:

$$u = \frac{(M^2 - m^2)^2}{s} - \frac{\lambda(s, M^2, m^2)}{2s}(1 + \cos\theta_{a1}^*) \tag{1.41}$$

Exercício 1.9:
Mostre as Eq.(1.39), Eq.(1.40) e Eq.(1.41)

As fronteiras da região física podem ser obtidas da relação :

$$-1 \leq \cos\theta^*_{a1} \leq 1$$

O limite superior de t é obtido quando $\cos\theta^*_{a1} = 1$

$$\begin{aligned} t &= 0 \\ u &= 2(M^2 + m^2) - s \end{aligned} \tag{1.42}$$

e o limite inferior de t é obtido quando $\cos\theta^*_{a1} = -1$

$$\begin{aligned} t &= \frac{-\lambda(s, M^2, m^2)}{s} \\ u &= \frac{(M^2 - m^2)^2}{s} \end{aligned} \tag{1.43}$$

Desta forma os limites são dados pela reta Eq.(1.42) e pela hiperbole Eq.(1.43) que possuem assíntotas:

$$\begin{aligned} s &= 0 \\ u &= 0 \quad \text{ou} \quad t = -s + 2M^2 + 2m^2 \end{aligned} \tag{1.44}$$

As curvas Eq.(1.42) e Eq.(1.43) se interseptam em $s = (M^2 \pm m^2)^2$. O sinal positivo corresponde ao limiar da reação .

Os valores máximos e mínimos de t podem ser obtidos da Eq.(1.35) impondo $\cos\theta^*_{a1} = \pm 1$ e usando Eq.(1.34) para escrever as energias e momentos em termos de s:

$$\begin{aligned} t_\pm &= m_a^2 + m_1^2 - 2E^*_a E^*_1 \pm 2p^*_a p^*_1 \\ &= m_a^2 + m_1^2 - \frac{1}{2s}\Big[(s + m_a^2 - m_b^2)(s + m_1^2 - m_2^2) \\ &\pm \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)\Big] \end{aligned} \tag{1.45}$$

onde t_- (t_+) é o maior (menor) valor de t. Note que t_+ é sempre negativo e $t_- > t_+$

Exercício 1.10:
Verifique a Eq.(1.45)

1.4 Seção de Choque e Largura de Decaimento

A Seção de Choque para o processo $a + b \to 1 + \cdots + n$ é dada por:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{|\vec{\beta}_a - \vec{\beta}_b|} \frac{1}{(2E_a)} \frac{1}{(2E_b)} |\mathcal{M}|^2 \frac{d^3p_1}{2E_1(2\pi)^3} \cdots \frac{d^3p_n}{2E_n(2\pi)^3} \\ & \cdot (2\pi)^4 \delta^4 \left[p_a + p_b - (p_1 + \cdots + p_n)\right] S \end{aligned} \tag{1.46}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{1}{|\vec{\beta}_a - \vec{\beta}_b|} \frac{1}{(2E_a)} \frac{1}{(2E_b)} \frac{S}{(2\pi)^{3n-4}} |\mathcal{M}|^2 \\ & \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3p_i}{2E_i} \delta^4 \left(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{n} p_n\right) \end{aligned} \tag{1.47}$$

onde S é o fator estatístico que leva em conta o fato de haver m partículas idêntica no estado final, *i.e.* :

$$S = \prod_i \frac{1}{m_i!}$$

Podemos ver que:

$$\frac{1}{|\vec{\beta}_a - \vec{\beta}_b|} = \frac{E_a E_b}{\left[(p_a \cdot p_b)^2 - m_a^2 m_b^2\right]^{1/2}} = \frac{2E_a E_b}{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \tag{1.48}$$

Exercício 1.11:
Mostre as duas igualdades da Eq.(1.48). Lembre que $\cos\theta_{ab} = \pi$

e definindo o fator fluxo por:

$$\mathcal{F} = 2(2\pi)^{3n-4} \lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2) \tag{1.49}$$

e o espaço de fase diferencial por:

$$d\mathcal{R}_n = \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 p_i}{2E_i}\ \delta^4\left(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{n} p_n\right) \tag{1.50}$$

podemos escrever[3]:

$$d\sigma = \frac{S}{\mathcal{F}}\ |\mathcal{M}|^2\ d\mathcal{R}_n \tag{1.51}$$

A quantidade $\mathcal{M}$ é chamada de *Amplitude Invariante*. Ela contém toda a informação sobre a dinâmica do processo que esta sendo estudado sendo calculada para um modelo específico através das chamadas *Regras de Feynman*. Podemos ver das Eq.(1.49) e (1.50) que $[\mathcal{F}] = E^2$ e $[\mathcal{R}_n] = E^{2n-4}$. Uma vez que $[\sigma] = E^{-2}$, podemos ver que $[\mathcal{M}] = E^{2-n}$, ou seja, em um processo $2 \to 2$ a amplitude invariante é adimensional.

Quando a integral em (1.51) é feita sobre todo o espaço de fase de dimensão $3n - 4$ obtemos a *seção de choque total* da reação ; se a integração for restrita a um sub-espaço do espaço de fase temos a *seção de choque diferencial*. Chamamos de *reação exclusiva* aquela na qual a energia e momento de todas as partículas é medido. Numa *reação inclusiva* apenas a energia e momento de algumas das partículas finais são medidos.

A Largura de Decaimento $p \to p_1 + \cdots + p_n$ é dada por:

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{2M}|\mathcal{M}|^2 \prod_{i=1}^{n} \frac{d^3 p_i}{2E_i(2\pi)^3}(2\pi)^4 \delta^4\left(p - \sum_{i=1}^{n} p_n\right) S \\ &= \frac{1}{2M}\frac{S}{(2\pi)^{3n-4}}|\mathcal{M}|^2 d\mathcal{R}_n \end{aligned} \tag{1.52}$$

Quando integramos sobre todo o espaço de fase obtemos a largura de decaimento que é o inverso da vida média da partícula. Podemos ver que o

[3] É importante notar que esta fórmula também é válida para fermions quando adotamos a normalização do spinor de Dirac igual a $2m$, ou seja:

$$\sum_{\pm s} u(p,s)\bar{u}(p,s) = \not{p} + m \ \text{ e } \ \sum_{\pm s} v(p,s)\bar{v}(p,s) = \not{p} - m$$

mesmo espaco de fase diferencial Eq.(1.50) aparece aqui ocorrendo apenas a troca $p_a + p_b \to p$ onde $p_{a,b}$ são os quadrimomentos iniciais da colisão e p é o quadrimomento da partícula que decai.

1.5 Espaço de Fase

Em uma reação $2 \to n$ (*i.e.* $a + b \to 1 + 2 + \cdots + n$) devemos impor a conservação de energia e momento:

$$\begin{aligned} E_a + E_b &= \sum_{i=1}^{n} E_i \\ \vec{p}_a + \vec{p}_b &= \sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i \end{aligned} \tag{1.53}$$

com,

$$E_j^2 = |\vec{p}_j|^2 + m_j^2 \ , \quad j = a, b, 1, \cdots, n$$

Chamamos de *espaço dos momentos* o espaço de $3n$ dimensões dos momentos $\vec{p}_i$. As condições (1.53) restringem o conjunto de $\vec{p}_i$ possíveis e definem neste espaço um sub-espaço de dimensão $3n - 4$ chamado de *espaço de fase*.

Numa reação $2 \to n$ existem $3n - 4$ variáveis do estado final ($3n$ componentes de momento menos 4 vínculos (1.53)). Porém, neste caso, o eixo do feixe inicial define uma direção no espaço em relação à qual o processo possui simetria levando a uma variável trivial ϕ. Assim temos $3n - 5$ variáveis essenciais no estado final. Se levarmos em conta o estado inicial, existe mais uma variável essencial que é o quadrado da energia total s levando portanto a um total de $3n - 4$ variáveis essenciais (no processo $2 \to 2$ estas duas variáveis são s e t).

Vamos nos deter agora ao espaço de fase diferencial. Podemos ver que o elemento de integração $d^3p/2E$ é invariante de Lorentz. Supondo um "boost" na direção de p_z, temos:

$$dp_z = \gamma(dp'_z + \beta dE') = \frac{E}{E'} dp'_z \tag{1.54}$$

Exercício 1.12:
Verifique a Eq.(1.54). Lembre-se que $E'^{\,2} = p'^{\,2} + m^2$ *e* $E = \gamma(E' + \beta p'_z)$

Desta forma,

$$\frac{d^3p}{2E} = \frac{dp_x dp_y dp_z}{2E} = \frac{d^3p'}{2E'}$$

Podemos também escrever o elemento de espaço de fase em forma integral como:

$$\frac{d^3p}{2E} = \int d^4p\delta(p^2 - m^2)\Theta(p^0) \qquad (1.55)$$

onde a integral é feita sobre todos os valores das componentes p^μ e $\Theta(p^0) = 0(1)$ para $p^0 < (>)0$.

Exercício 1.13:
Escreva $p^2 = (p^0)^2 - \vec{p}^2$ *e* $E^2 = \vec{p}^2 + m^2$ *e use a propriedade da função delta*

$$\delta[f(x)] = \frac{1}{|f'(x_0)|}\delta(x - x_0)\ , \quad f(x_0) = 0$$

para mostrar a Eq.(1.55)

Desta forma $\mathcal{R}_n$ Eq.(1.50) pode ser escrito como:

$$\mathcal{R}_n = \int \prod_{i=1}^{n} d^4p_i\ \delta(p_i^2 - m_i^2)\ \Theta(p_i^0)\ \delta^4\left(p_a + p_b - \sum_{i=1}^{n} p_n\right) \qquad (1.56)$$

Em geral omite-se a função $\Theta(p_i^0)$ que apenas denota o fato da energia ser uma quantidade positiva.

1.5.1 Espaço de Fase de Uma Partícula

O espaço de fase de uma partícula é trivial. Utilizando a Eq.(1.50) e Eq.(1.55) o espaço de fase para a reação $p_a + p_b \to p$, fica:

$$d\mathcal{R}_1 = \int d^4p\delta(p^2 - m^2)\ \delta^4(p_a + p_b - p)$$

ou, integrando em d^4p usando a função δ^4:

$$\mathcal{R}_1 = \delta[(p_a + p_b)^2 - m^2] = \delta(s - m^2) \tag{1.57}$$

1.5.2 Espaço de Fase de Duas Partículas

Vamos agora considerar a integral do espaço de fase de duas partículas:

$$\mathcal{R}_2 = \int d^4p_1 d^4p_2 \; \delta(p_1^2 - m_1^2) \; \delta(p_2^2 - m_2^2) \; \delta^4(p - p_1 - p_2) \tag{1.58}$$

No caso do espalhamento $2 \to 2$ temos $p = p_a + p_b$ e no caso do decaimento de uma partícula, p é o seu momento.

Integrando em d^4p_2 usando a δ^4 obtendo:

$$\mathcal{R}_2 = \int d^4p_1 \; \delta(p_1^2 - m_1^2) \; \delta[(p - p_1)^2 - m_2^2)]$$

Lembrando que $\mathcal{R}_n$ é invariante de Lorentz podemos escolher o referencial onde $p = (\sqrt{s}, 0, 0, 0)$ ou seja o CM das partículas iniciais ou o sistema de repouso da partícula que decai ($\sqrt{s} = M$):

$$\mathcal{R}_2 = \int d^4p_1 \; \delta(p_1^2 - m_1^2) \; \delta(s - 2\sqrt{s}E_1 + m_1^2 - m_2^2)$$

Usando a Eq.(1.55) temos:

$$\mathcal{R}_2 = \int \frac{d^3p_1}{2E_1} \; \delta(s - 2\sqrt{s}E_1^* + m_1^2 - m_2^2)$$

Note que não mencionamos a função $\Theta(p_0) = \Theta(\sqrt{s} - m_1 - m_2)$ que aparece na Eq.(1.55). Ela neste caso apenas garante que $\mathcal{R}_2$ seja nulo abaixo do limiar de produção das partículas 1 e 2 em repouso *i.e.* $\sqrt{s} < m_1 + m_2$. Como

$$d^3p = p^2 dp d\Omega = pEdEd\Omega$$

temos:

$$\mathcal{R}_2 = \int \frac{p_1^* dE_1^* d\Omega_1^*}{2} \; \delta(s - 2\sqrt{s}E_1^* + m_1^2 - m_2^2)$$

onde, $d\Omega_1^* = \sin\theta d\theta_1^* d\phi_1^*$ descreve a orientação do momento $\vec{p}_1$ no sistema CM (repouso) de p. A função δ fixa o o valor de E_1^* e consequentemente o modulo do momento p_1^* (ver Eq.(1.34)), *i.e.* :

$$p_1^* = p_2^* = [(E_1^*)^2 - (m_1^*)^2]^{1/2} = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{2\sqrt{s}}$$

Desta forma, integrando a função δ, lembrando que $\delta(ax) = (1/a)\delta(x)$ temos:

$$\mathcal{R}_2 = \frac{p_1^*}{4\sqrt{s}} \int d\Omega_1^* = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{8s} \int d\Omega_1^* \tag{1.59}$$

Em geral a Amplitude Invariante depende do ângulo θ^*. No entanto, se $\mathcal{M}$ independe de θ^*, chegamos ao resultado final com $\int d\Omega_1^* = 4\pi$:

$$\mathcal{R}_2 = \frac{\pi p_1^*}{\sqrt{s}} = \frac{\pi\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{2s}$$

Utilizando as Eq.(1.51,1.59), a seção de choque de um processo $a + b \to 1 + 2$ fica:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \frac{S}{2(2\pi)^2\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \left|\mathcal{M}\right|^2 d\mathcal{R}_2 \\ &= \frac{S}{2(2\pi)^2\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \left|\mathcal{M}\right|^2 \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{8s} d\Omega_1^* \end{aligned} \tag{1.60}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega_1^*} &= \frac{S}{64\pi^2 s} \frac{\lambda^{1/2}(s, m_1^2, m_2^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_a^2, m_b^2)} \left|\mathcal{M}\right|^2 \\ &= \frac{S}{64\pi^2 s} \frac{p_1^*}{p_a^*} \left|\mathcal{M}\right|^2 \end{aligned} \tag{1.61}$$

onde $p_{a(1)}^*$ são os momentos iniciais (finais) no CM, dados pela Eq.(1.34).

Em geral é mais interessante termos uma expressão invariante para a seção de choque diferencial. Isto pode ser feito usando a definição de t Eq.(1.32):

$$dt = 2p_a^* p_1^* d(\cos\theta_{a1}^*) = \frac{1}{\pi} p_a^* p_1^* d\Omega_1^*$$

Desta forma:

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{d\Omega_1^*}\frac{d\Omega_1^*}{dt} = \frac{\pi}{p_a^* p_1^*}\frac{d\sigma}{d\Omega_1^*}$$

ou seja:

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma}{dt} &= \frac{S}{64\pi s}\frac{1}{(p_a^*)^2}\,|\mathcal{M}|^2 \\ &= \frac{S}{16\pi}\frac{1}{\lambda(s, m_a^2, m_b^2)}\,|\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \tag{1.62}$$

Devemos lembrar que a integral em dt é feita levando em conta os limites Eq.(1.45), ou seja

$$\sigma = \int_{t_+}^{t_-}\frac{d\sigma}{dt}$$

Exercício 1.14:
Suponha que $|\mathcal{M}|^2 = -t/s$. Calcule a seção de choque total neste caso utilizando Eq.(1.61). Compare o resultado obtido quando se utiliza a Eq.(1.62). Considere $m_a = m_1 = 0$ e $m_b = m_2 = m$

Podemos também computar a largura de decaimento Eq.(1.52) de uma partícula de massa M, em repouso, em duas outras *i.e.* $P \rightarrow p_1 + p_2$:

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{2M}\frac{S}{(2\pi)^2}|\mathcal{M}|^2 d\mathcal{R}_2 \\ &= \frac{1}{2M}\frac{S}{(2\pi)^2}|\mathcal{M}|^2\frac{\lambda^{1/2}(M^2, m_1^2, m_2^2)}{8M^2}d\Omega_1^* \\ &= \frac{S}{64\pi^2 M^3}\lambda^{1/2}(M^2, m_1^2, m_2^2)|\mathcal{M}|^2 d\Omega_1^* \\ &= \frac{S}{32\pi^2 M^2}p_1^*|\mathcal{M}|^2 d\Omega_1^* \end{aligned} \tag{1.63}$$

1.5.3 Espaço de Fase de Três Partículas

O espaço de fase para três partículas é:

$$\mathcal{R}_3 = \int\prod_{i=1}^{3}\frac{d^3p_i}{2E_i}\,\delta^3(\vec{p} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2 - \vec{p}_3)\,\delta(E - E_1 - E_2 - E_3)$$

Vamos escolher o referencial onde $\vec{p} = 0$ e integrar sobre $\vec{p}_2$ usando a função δ^3:

$$\mathcal{R}_3 = \int \frac{d^3p_1 d^3p_3}{8E_1E_2E_3}\delta(\sqrt{s} - E_1 - E_2 - E_3)$$

sendo E_2 dado por:

$$E_2^2 = |\vec{p}_1 + \vec{p}_3|^2 + m_2^2$$

Escrevendo o elemento de integração como:

$$d^3p_1d^3p_3 = (p_1^2dp_1d\Omega_1)(p_3^2dp_3d\Omega_3) = (p_1E_1dE_1d\Omega_1)[p_3E_3dE_3(d\cos\theta_{13}d\phi_3)]$$

onde Ω_3 descreve a orientação de $\vec{p}_3$ em relação a $\vec{p}_1$ e Ω_1 a orientação de $\vec{p}_1$ em relação a algum eixo.

Podemos assim usar a função δ para integrar em $d\cos\theta_{13}$ usando:

$$\frac{dE_2}{d\cos\theta_{13}} = \frac{p_1p_3}{E_2}$$

obtendo,

$$\mathcal{R}_3 = \frac{1}{8}\int dE_1dE_3d\Omega_1d\phi_3$$

Podemos também escrever $\mathcal{R}_3$ em função de s_{12} e s_{23}, definidos anteriormente na Eq.(1.28) ($s = M^2$), usando o Jacobiano:

$$\frac{\partial(E_1, E_3)}{\partial(s_{12}, s_{23})} = \frac{1}{4s}$$

obtendo:

$$\mathcal{R}_3 = \frac{1}{32s}\int ds_{12}ds_{23}d\Omega_1d\phi_3 \tag{1.64}$$

Devemos notar que no caso da colisão de duas partículas (*i.e.* $p = p_a + p_b$) Ω_1 descreve a orientação de $\vec{p}_1$ no CM e ϕ_3 a rotação da configuração de todos os momentos em torno de um eixo. Para o caso do decaimento como não existe um eixo preferencial (imagine a partícula em repouso) podemos integrar em $d\Omega_1$ e $d\phi_3$ obtendo:

$$\mathcal{R}_3 = \pi^2\int dE_1dE_3 = \frac{\pi^2}{4s}\int ds_1ds_2$$

Desta forma a largura de decaimento Eq.(1.52) fica:

$$\begin{aligned}\Gamma &= \frac{S}{(2\pi)^3}\frac{1}{8M}\int |\mathcal{M}|^2 dE_1 dE_3 \\ &= \frac{S}{(2\pi)^3}\frac{1}{32M^3}\int |\mathcal{M}|^2 ds_{12} ds_{23} \end{aligned} \tag{1.65}$$

Podemos notar que a distribuição de espaço de fase:

$$\frac{d\mathcal{R}_3}{ds_{12}ds_{23}} = \frac{\pi^2}{4s}$$

é constante para s fixo. Desta forma se os dados de um experimento de decaimento forem "plotados" no plano $s_{12} \times s_{23}$ a densidade de pontos será proporcional ao modulo ao quadrado da amplitude invariante. Ou, dito de outra maneira, a não uniformidade no "plot" fornece informação sobre a dinâmica do processo. Por exemplo, no caso do decaimento $D \to K\pi\pi$, o aparecimento de bandas quando $m_{(K\pi)} = m_{K^*}$, reflete o aparecimento do canal de decaimento $D \to K^*\pi \to K\pi\pi$. Esta distribuição é chamada de *Dalitz Plot*.

A região física do Dalitz Plot pode ser determinada considerando s_{12} para o caso em que $\vec{p}_1$ é paralelo ou antiparalelo a $\vec{p}_1$, ou seja:

$$\begin{aligned} s_{12}^{\pm} &= m_1^2 + m_2^2 + 2(E_1^r E_2^r \pm |\vec{p}_1^{\,r}||\vec{p}_2^{\,r}|) \\ &= m_1^2 + m_2^2 + \frac{1}{2s_{23}}\Big[(M^2 - s_{23} - m_1^2)(s_{23} + m_2^2 - m_3^2) \\ &\pm \lambda^{1/2}(M^2, s_{23}, m_1^2)\lambda^{1/2}(s_{23}, m_2^2, m_3^2)\Big] \end{aligned} \tag{1.66}$$

No caso em que apenas m_2 é diferente de zero a Eq.(1.66) impõe os limites:

$$\frac{M^2 m_2^2}{s_{23}} \leq s_{12} \leq M^2 + m_2^2 - s_{23}$$

e, no caso em que todas as massas são nulas, temos:

$$0 \leq s_{12} \leq M^2 - s_{23}$$

As igualdades determinam as fronteiras do Dalitz Plot. No primeiro caso temos:

$$\begin{aligned} s_{23} &= \frac{M^2 m_2^2}{s_{12}} \\ s_{23} &= M^2 + m_2^2 - s_{12} \end{aligned} \tag{1.67}$$

e para o caso de todas as massas nulas:

$$\begin{aligned} s_{12} &= 0 \\ s_{23} &= 0 \\ s_{23} &= M^2 - s_{12} \end{aligned} \tag{1.68}$$

Bibliografia

[1] L.D. Landau e E.M. Lifshitz, “The Classical Theory of Fields”, (Pergamon Press, 1975)

[2] E. Byckling e K. Kajantie, “Particle Kinematics”, (John Wiley & Sons, 1973)

[3] J.D. Bjorken e S.D. Drell, “Relativistic Quantum Mechanics” (McGraw-Hill, 1964)

[4] Particle Data Group, ”Review of Particle Properties” Phys. Lett. **239B**, 1 (1990)